Das mathematische Material

für die 6-12 Jährigen

Das Material

wird beschrieben und dargestellt.

Verschiedene Arbeitsmöglichkeiten werden gezeigt und auf das, den einzelnen Tä=tigkeiten innewohnende Ziel, wird hingewiesen.

Work with the Material

1. The Hierarchies (Large wooden material)

2. Large Beadframe (Long Multiplication)
   a) Use of frame
   b) Writing numbers
   c) Multiplication by tens or hundreds
   d) Multiplication (the analysis of numbers)
   e) Writing only final result
   f) Writing partial results both under analysed number and stated multiplication.
   g) Writing partial results
   h) Abstraction

3. First Presentation of the Comutative Law of Multiplication (Short BeadStair, Cards 0 - 9 , ~~Signs~~ Brackets (e.g.) ooo} x 5
   ooooo} x 3

   Child draws and writes)

4. Distributive Law of Multiplication and Continuation of Comutative Law.
   a) envelope (Bead bars in envelope, cards on table e.g. (... - ....) 2 the reverse .. .(3+4)
   No writing or drawing at this stage (No signs)
   b) 2 envelopes (Multiplicant and multiplier consisting of sums of more than 1 One envelope containing bead bars, the other cards e.g. (... , ...) (2,5) and reverse
   Again no writing or drawing.
   c) As step (b) with signs added and original sum is left. The working and the result of the sum is also placed out in cards.
   Child draws and writes.
   d) Whole sum is stated in cards. But child works as in(c) with beads and cards
   e) Child works abstractly
   f) Using decimal system (golden beads) work as (c). Later draw childs attention to the fact that u x u = u
   u x t = t
   t x u = t
   t x t = h and to the desposition of the various groups.

5. The Bank Game

6. The Flat Bead Frame
   a) Writing only final result
   b) Writing partial results

7. The Checker Board
   a) Putting out bead bars stated number of times
   b) Using tables
   c) Putting out bead bars stated number of times but working crossmultiplication
   d) Working cross multiplication putting out only final result.

8. Multiples and LCM (kleinster gemeinsamer Nenner)
   a) Build several tables with short bead stair
   b) Searching for common multiples placing brackets, cards and writing result of research.
   c) Looking for LCM with Peggoty Board
   d) Looking for LCM using charts

9. Squaring and Cubing Material

9. Squaring and Cubing Material

√a) Handling Material sensorially

√b) Skip counting, making geometrical patterns, inscribed and circumscribed figures.

√c) Calculations with the squares and cubes in the 4 rules.

√ 1. Notation of powers (How to write)

√ 2. Associations of cards and all bead material.

√ 3. Calculations with cards, brackets and beadmaterial.

√ 4. Commands

10. The Powers of Numbers (Wooden material and cards)

√a) Passing from one power to power with material and cards.

√b) Call attention for recurring shapes e.g. $2^6 - 4^3$

√c) Calculation with powers.

SQUARE MEASURE OR AREA

Material to show:

A. How one arrived to calculation of rectangular surfaces and of prallelograms - wooden material. (1. book)

B. ... of triangular - wooden (1. book) and of trapecial surfaces - iron material,

C. ... of polygonal surfaces - iron material

D. ... of circular surfaces - iron material
The square divided into triangles and rectangles.

E. The illustration of meaning of eaqual, similar and equivalent figures - names of the lines: side, diagonal, median etc.

F. Ehe relation of area value and of respective sides of the inscribed and surcumsribed sqares by joining the mid-points of the squares.

G. Transforming rectangles into equivalent squares and vice-versa.

H. Building of one of the illustrations of Pythagoras theorem.

J. The illustration of the infinite within the finite by inscribed and circunscribed squares by arranging them concentrically or diagonally.

J. The three demonstrations of the theorem of Pythagoras. - (iron material)

K. Equivalence of figures in equivalent rectangular figures and vice-versa.
The equilateral triangle devided into parts:

L. Iron material: lines, and their names: size, height, base, bisector, ect.

M. The relation of area value and side value between the large triangle and the triangle formed by joining the midpoints of its sides (of the large triangle)

N. The rhombus formed by two smaller equilateral triangles its value in relation to the large triangle; length of its diagonals compared with lines of the large triangle.

O. The same for the trapezium.

P. Value of large triangle expressed in rhombuses.
The equilateral triangle divided into parts. (wooden material: constructive triangles.

Q. Quadilateral figures that can be composed with triangles which are 1/2 of the large triangles (see first box of constructive triangles used in the"casa dei Bambini"

R. Figures that can be composed with triangles which are 1/3 of the large triangle - special study of the hexagon in relation to the rhombuses that form it and the long diagonals of the latter - special study of the hexagon in relation to the rhombuses that form it and the long diagonals of the latter - in relation to the triangle inscribed in the hexagon: respective surface value of the two - the sides of the triangle equal to the long diagonal of the rhombuses.

S. Figures that can be composed with the triangles which are 1/4 of the large triangle. Special study of the hexagon.

T. The demonstration of the theorem of Pythagoras can be applied to figures other than squares by the use of the above materials.

Ornamental Geometry.

U. By combining inscribed and circumscribed figures of the same kind (all squares, triangles circles etc.) or of different kind(material: figures cut out in paper of different colour.

Further Exercises

1. Multiplication of all numbers (1- 10) x 10
   a. Substituting by squares
   b. Combination of two of them to form squares of the sum of two numbers.

2. Long division (2or 3 boards) three steps in writing down

3. Long division by equal quotients (last step) how many times the first number goes onto the first of the dividend.

4. Divisibility of 2 and 5; 4 and 25; 8 and 125; 3and 9 and 11. with decimal system and beadframe.

5. Finding prime numbers under 100; chart of the multiples of numbers(under 100).

6. Lowest common multiple (LCM)all stages with peggoties - multiple chart and abstract.

7. Abstract cross multiplication (t + u) x (t + u)

8. Factors (List of multiples A + B and Factorlist)

9. Common factors - Highest common factor (H.C. F.)
   A)With peggoties
   B)with factorlist
   C)abstract

10. Squaring $(2 + 3)^2$ etc.
   10^2 divided into 4, 9, 96 parts
   a) with beads
   b) with peggoties
   c) with papers
   Passing from one square to the other - $1^2 - 2^2$, $3^2 - 7^2$ etc.
   Finding 11^2 with decimal system, finding ditto with pegotty board.
   Studying the desposition of 1 - 10 - 100 etc.by presenting geometrically on that chart the spaces of 11, 111, etc.
   Abstract squaring and algebraic expression.

11. Finding squareroot with decimal system.
   The building of the geometrical formula.
   Finding the squareroot with peggoty-board. Abstract.

12. Repetition of powers in numbers and in letters: $2^3 - 2^9$; $3^3 - 3^9$; abstract.

13. Negative numbers, negative snake. Operations with negative numbers.

14. Fractions: (see manual work with fractions)
   Preperatory exercises, sensorial exercises, reduction, simplification of fractions etc.
   Association with numbers
   The 4 Operations with fractions.

15. Introduction of different problems (see drawings) Introduction of formula e.g. Time = Distance

   Capital - Rate - Time - Interest
   (with material of decimal system;with formula)

16. The cube of a sum
   A. Passing from one cube to another
      1. numbers differing by one
      2. " " " more than one.
   B. Formula deriving from it and new material to represent $(a + b)^3$ and $(a + b + c)^3$ with binome and trinome, wooden material and cards.
   C. Giving decimal value to a, b and c (letter formula on one side of the card and decimal value on the other with the same material.
   D. New material in which the colours represent decimal values and new arrangement leading to cube root.
      Abstract.

   Cubic measures
17. A. The building of prisms and cubes with small brown cubes taken as unit system (general ides)

   B. Material to show the calculation of cubic measure in a rectangular prism.

   C. Material to show the calculation of cubic measure in an unrectangular prism.

   D. The same for cubic measure of pyramid and prisms and cones and cylinders with iron solids and sand.

18. Cube Root
   A. with material (used in 16 C) giving decimal values to the different pieces of material.

   B. The material used in which the colours represent decimal values.
   Abstract.

denen Sitten in diese Hinsicht entwickelt.

Die Natur hat dafür gesorgt, daß das Kind in den ersten Monaten nicht von der Mutter getrennt werden kann. Sie ist die Trägerin der Nahrung für das Kind.

Kinder lieben es, auf Entdeckungsreisen zu gehen, aber sie kommen immer wieder gern nach Hause in den bekannten und sicheren Raum.

Ein Kind beobachtet nicht nur die Dinge und Handlungen. Es nimmt mit der gleichen Intensität die Gefühlsbeziehungen wahr. Diese sind in erster Linie die Führer zur Nahrungsaufnahme und gleichfalls die Wegbereiter für die Aufnahme der Religion.

Das Kind hat die Aufgabe, ein Glied seiner Gruppe zu werden.

Es sind 2 Dinge, die ein Kind unruhig werden lassen.
1. Das Kind sieht etwas, und es weiß nicht was vorgeht.
2. Der Drang eine bestimmte Sache zu lernen.

Diese Unruhe dauert an, bis eine bestimmte Befriedigung erreicht ist.

Die beste Art und Weise der Anpassung geschieht durch den natürlichen Drang, seine Umgebung nachzuahmen. Das Kind baut sein eigenes Selbst durch seine Aktivität auf. Dies nennen wir sehr oft "Spiel".

Das Kind urteilt noch nicht. Es will werden wie die Andern und kann deshalb zur Vollkommenheit nur durch die Nachahmung gelangen. Das Kind betrachtet den Erwachsenen als allmächtig.

2. Teil des Vortrags "Arithmetic" Einführung der Zahlen von 1-10 und die Darbietung des Dezimalsystems.

Man erhält mehr Klarheit, wenn man die einzelnen Teile einer Ganzheit auseinandernimmt.

1. Arbeit mit den Stangen - Jede Zahl ist ein Begriff gebunden an die Quantität.
2. Darbietung der Zahlen-symbole.
3. Anschließend das Zueinanderordnen von Qantität und Symbol.
4. Die Spindelkästen - Die Quantität besteht aus verschiedenen Teilen (Spindeln) und soll zu dem in der Reihe stehenden Zahlensymbol geordnet werden. (Wunsch die Einheit wieder herzustellen)
   Die Bedeutung der Null wird geboten.
5. Die Zahlensymbole mit den Chips - Beides muß in die richtige Reihenfolge und zur richtigen Menge geordnet werden.
6. Die Darbietung des Dezimalsystems bietet keine Schwierigkeiten mehr. Es werden lediglich die drei Begriffe Zehnerstäbchen, Hunderterquadrat und Tausenderwürfel gelernt. Die einzelnen Manipulationen des Rechnens wie: Addieren, Abziehen, Multiplizieren und Dividieren lassen sich leicht durchführen.

Montessori entdeckte, daß die Kinder Interesse an abstrakten Warten hatten. - Die Abstraktion durch das Wort hilft eine Sache zu isolieren von andern Dingen. - Das materielle Symbol ist gleichfalls eine Brücke zurück zu den materiellen Dingen. Beispiel: Bei dem Wort"rot" entsteht das konkrete Bild der Farbe Rot. Die Engramme werden zu Komplexen aufgebaut. Ist ein solcher Komplex bis zu einem gewissen Grade entstanden, dann kann er jeder Zeit in das Bewußtsein hinein wirken und eine bewußte Tätigkeit in Gang setzen.

Zur Vorbereitung des Schreibens: Jeder einzelne Teil, der beim Schreiben mitwirkt, war durch ein bestimmtes Interesse entwickelt worden. Als alle Teile fertig waren , fing das Kind an zu schreiben.

Montessori war an dem gesamten inneren Aufbau interessiert. Sie studierte die Einzelheiten, aber ihr Interesse war auf das komplexe Wachstum gerichtet.

Der abstrahierende Geist ist dem Menschen aller Zeiten und Rassen eigen. Der Unterschied liegt in erster Linie in der unterschiedlichen Umgebung.

2. Teil "Über die Einführung des Dezimalsystems"

Darbietung der einfachen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Das Kind ist nicht mehr mit der einfachen Erklärung des Sichtbaren zufrieden. Es wünscht absolute Klarheit. Das Kind möchte in diesem Alter schon das Unsichtbare erforschen.

Die erste Aufgabe in diesem Alter ist:
"Werde ein Glied der Gemeinschaft!"
Die zweite Aufgabe heißt:
"Eingehende Forschung des Sichtbaren und Unsichtbaren in der Umgebung"

Die Haltung und das Interesse des Kindes haben sich im Verhältnis zur ersten Lebensphase sehr verändert.
Das Interesse und die Haltung der Eltern sind jetzt nicht mehr der alleinige Maßstab für das Kind. Das Hauptinteresse ist jetzt vielmehr auf seine gleichaltrigen Freunde gerichtet. Das Kind ist jetzt von Natur aus nicht mehr egozentrisch veranlagt, d. h. es bezieht nicht mehr alle Dinge auf sich, sondern es sieht die Dinge mit einem wachsenden Gruppenbewußtsein. - Die Kinder bilden eine Gruppe. Sie geben sich eigene Regeln. - Sie haben den Drang, eine Gemeinschaft zu bilden. -

Das Kind hat in dieser Zeit einen außerordentlich klaren und intelligenten Geist. Es schlummern ungeahnte Fähigkeiten in ihm. Es hat eine gute Vorstellungskraft und eine große Aufnahmefähigkeit für intellektuelles Lernen.

Wieder finden wir die Erscheinung der Wiederholung, aber jetzt wird eine Tätigkeit nicht immer in der gleichen Weise wiederholt, sondern die Tätigkeit wird in verschiedenen Variationen und Erweiterungen ausgeführt.

Das Kind möchte gerne etwas möglichst Großes erreichen und herstellen. - Die größte Anstrengung wird mit Freude aufgewandt. (Kinder, als sie das System der Formel $a^2 + b^2 = c^2$ verstanden hatten, hörten nicht eher mit dieser Operation auf, bis sie das ganze Alphabet dazu benutzt hatten.)

2. Teil "Weitere Besprechung des Dezimalsystems - Großer Rechenrahmen -

Das Kind baut zuerst sein Unterbewußtes auf, indem es seine Umgebung absorbiert. Darauf folgt dann mehr und mehr das bewußte Handeln.

Montessori beachtete bei der Gestaltung der Umgebung besondere Gesichtspunkte. Wenn die Kinder beispielsweise eine bestimmte Stufe innerhalb des Lernprozesses erreicht hatten, war neues Material notwendig. So entwickelte sie anschließend an das Perlenmaterial neue Arbeitsmittel, die dem Kinde erneut Gelegenheit geben, das Dezimalsystem in seiner Funktion zu erfahren.

Beschreibung des kleinen und großen Rechenrahmens einschließlich des Aufschreibens der Zahlen und der verschiedenen Rechenoperationen.

Die einzelnen Schritte, die innerhalb der Rechenoperationen vorgenommen werden, müssen für das Kind klar ersichtlich sein.

9. Vortrag am 4. 11. 57 gehalten von Mario Montessori

Über die Einführung in die Mathematik.

Früher hat man zuerst die Regeln gegeben und ließ dann die Erfahrungen sammeln. Heute stellt man zwar die Erfahrung der Regel voraus, doch ist die Zeit, um wirklich Erfahrung und Klarheit zu erlangen, in den meisten Fällen, viel zu kurz bemessen.

Erfahrung - daraus erfolgt Klarheit - und die Regel ergibt sich.

Dieser Weg erscheint zunächst sehr viel länger, ist aber in Wirklichkeit sehr viel kürzer. Ohne das richtige Verständnis führt der Weg nirgendwo weiter.

Wenn das Kind Interesse gewinnt, dann arbeitet der kindliche Geist sehr schnell und intensiv. Das ganze ist ein sehr natürlicher Prozeß. Es entstehen zunächst bestimmte Punkte, die dem Kind bewußt werden. Von diesen Bewußtseinspunkten her entspringt die Aktivität.

Erfindung und Entdeckung sind zweierlei Dinge. Ersteres ist eine neue Schöpfung. Jede Erfindung ist etwas Neugeformtes. Letzteres ist etwas, was schon immer da war. Die Entdeckung kann nur erfolgen, wenn Auge und Geist dazu fähig, sind, das bisher Unsichtbare aufzunehmen. Die Atomkraft beispielsweise hat schon immer bestanden, aber erst der Mensch unseres Jahrhunderts hat sie entdeckt d. h. sichtbar gemacht.

Wir können das Kind auf seiner Entdeckungsfahrt unterstützen indem wir ihm Gelegenheit geben, daß mehr und mehr einzelne Fakten in sein Bewußtsein rücken. Das Wissen wird allmählich immer mehr ein Teil des Kindes. Maria Montessori nannte diesen Prozeß Inkarnation. Dieser Prozeß ist mit eigener Anstrengung verbunden. - Beispiel der fressenden Schlange. Diese Übung baut alle vorkommenden Kombinationen der Addition, Subtraktion und einfachen Multiplikation auf. - Die Funktion des Multiplizierens, Addierens und Subtrahierens wird dem Kinde klar ins Bewußtsein gerückt. Es handelt sich im Grunde um einfaches Zusammenzählen , Das Teilen in zwei Teile , und um das Zusammenzählen mehrerer, gleichgroßer Teile.

Man muß dem Kinde die Bedeutung der einzelnen Zahlen erklären, bevor man irgend eine Rechenoperation beginnt.

Was bedeuten die Worte:

Multiplikand
Multiplikator
Produkt
Ergebnis ?

Indem man den Kindern etwas von der Entstehung dieser Worte erzählt und sie dann auch entsprechend konkret darstellt, weckt man im Kinde für diese Dinge Verständnis und Interesse. Es wird nicht nur Interesse für die direkte Sache, sondern gleichfalls für die Geschichte geweckt.

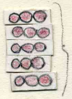
Innerhalb unserer Erklärung erwähnen wir, daß man den Multiplikanden und den Multiplikator als Faktoren bezeichnet.

X Einführung der einfachen Multiplikation
der kombinierten Multiplikation
der Multiplikation mit zwei Summen
die Multiplikation mit dem Dezimalsystem
das Bankspiel

The Simple Multiplication

3

We take a quantity and ask the child to put the symbol with it.



5

We ask to put this quantity
5 times

×

We explain the multiplying sign.
- Its origin from the word plus,
p, x - We make clear the distinction between + and x .

How much do we have alltogether?

The child finds out that we have fifteen, and he puts the corresponding quantity underneath.

=

We explain the equal sign.
- There are no other things more equal than two parallel lines -.

3 × 5 = 15

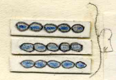
We lay down the operation with symbols.

After we have gone through this operation once the child uses the symbols along with the concrete quantities until the child does not need the concrete quantities anymore.

Take this quantity three times.

× 3

The indication of the multiplicator is shown with the symbol.



We ask the children always to put the rods underneath of each other. Than the rectangle will appear at one time on the vertical and at the other time on the horizontal line.
This is an indirect preparation for the square-root.

The interchangebility becomes clear but it becomes also clear that we have done two different operations.

5 × 3 = 15

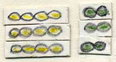
The More Difficult Multiplication

Of what there is in here you take 3 times.

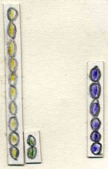
$\times\ 3$

- The child finds a four and a two in concrete material. The child takes them out of the envelope and places them besides the multiplicationnumber that is the multiplicator. -

Everything what has been put out stays there on top of the line so that we can always remember what we have to do.



The child does what he has been asked to do. He puts down 3 fours and 3 twos.He lays them side by side.



Then each number is summed up seperately and the result is put down in concrete material.

After that we show the child how he can write down the whole process in numbers.

The brackets represent the envelope.

$(4\quad 2) \times 3$

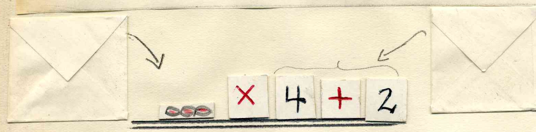
$4 \times 3 + 2 \times 3 = 12 + 6$

$= 18$

We have seen a sum multiplied by a number

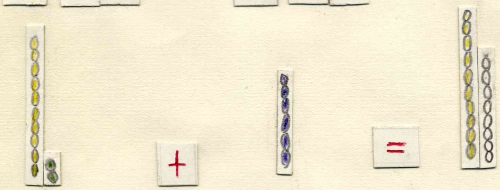
and then

We can do the same operation the other way round. Then the quantity is three -  - . This quantity is multiplied by 4 and 2.



$\times\ 4 + 2$

$3 \times 4 \qquad 3 \times 2$



$+ \qquad =$

$12 + 6 = 18$

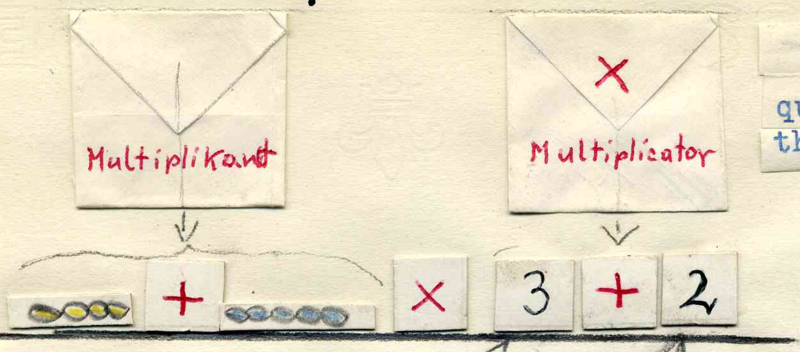
$3 \times (4 + 2) = 3 \times 4 + 3 \times 2$

$= 12 + 6$

$= 18$

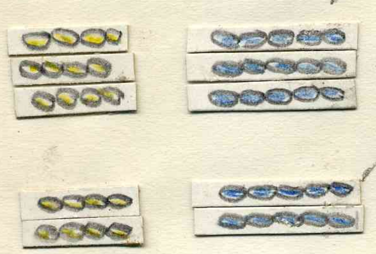
We have seen a number multiplied by a sum

Multiplication With Two Sums



One envelope is for the quantities and one is for the numbers.

They are taken out and put on the line.
They stay there to remind us what we have to do.
As soon as we have done the operation with one number this number is turned upside down.



The summing up is done as we did it in the previous operations.

Then everything is put into numbers.

$$(4+5)\times(3+2) =$$

$$4\times3+5\times3+4\times2+5\times2 = 12+15+8+10$$

$$= 45$$

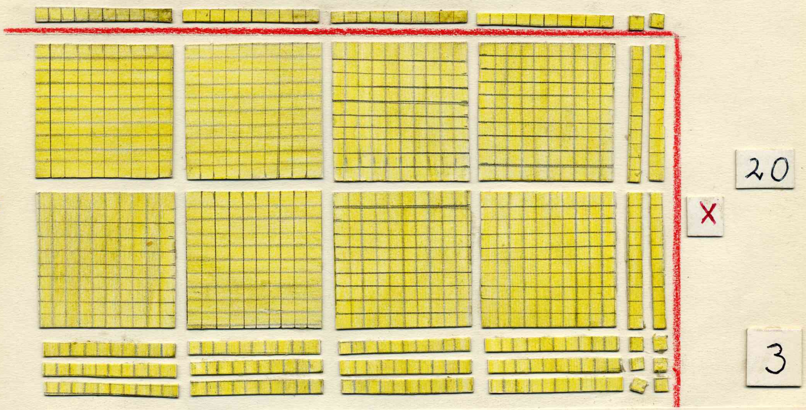
There are two laws
==================

When a sum is multiplied by a number each seperate figure must be multiplied by that number.

When a sum is multiplied by a sum each must be multiplied by each.

Multiplication With Units and Tens

42 × 23 =



When we make multiplications with units and tens we show the children how to use the decimalsystem for this operation.

In our example we are asked to multiply 42 by 23.
We put this sum above the line we have drawn or marked with something else.
In order to make clear what we are asked to do, we lay down the 42 in concrete material.
Underneath the line on the right-hand side we put down the 23 taking the number in its two parts - the tens and units.-
The first operation is: Take 40 twenty times. - first 10 x then 10 x again

Second operation:is: Take 2 twenty times. - " -

Third operation is: Since we have taken all numbers with 20 this number is turned upside down.

Fourth operation is: Take 40 three times.

Fifth operation is: Take 2 three times.

Sixth operation is: Since we have taken all numbers with 3 this number is turned upside down.

Seventh operation is: The child now can count and add together the hundreds tens and units.
The result in our case is 966.

We make the child aware of the fact that:

Units multiplying tens give tens
Units multiplying units give units
Tens multiplying tens give hundreds

The child will write down in our example:

4 tens	x	2 tens	=	8 hundreds
4 tens	x	3 units	=	12 tens
2 units	x	2 tens	=	4 tens
2 units	x	3 units	=	6 units
				967

The geometrical disposition is very important because it makes clear many facts which will be important for all further operations in geometry. Besides that the decimalsystem becomes clearer in its function too.

10. Vortrag am 6. 11. 57 gehalten von Mario Montessori

Einführung in die Mathematik Teil 2

Einführung des großen Rechenrahmens und des Schachbretts für die Multiplikation. (siehe Beilage)

Visuelle und manuelle Operationen sind außerordentlich wichtig. Sie vermitteln uns konkrete Vorstellungen und man wird dadurch in die Lage versetzt, Dinge zu sehen, die man sonst nicht sehen würde.

Die Kinder, die mit diesen Materialien arbeiten sind in der Lage die Regeln, die sich aus der Arbeit ergeben auch anderswo anzuwenden. Dies geschieht spontan.

Woher kommt der Begriff Quadratwurzel?

Die Entstehung dieses Begriffes wird meist außer acht gelassen. Nur die Regel besteht noch und wird ohne Vorstellung angewandt.

Das organische Wachstum des Kindes kann nicht gelenkt wohl aber unterstützt werden. Der Körper wächst andauernd, aber vieles von diesem Wachstumsprozeß bleibt für uns unsichtbar. Wir sehen nur Bruchstücke dieses Wachstums.(Erlernung der Sprache z. B.)

Die übliche Darbietung der Mathematik ist gegen alles Naturgesetz.

Es ist notwendig, daß man in der Mathematik konkrete Vorstellungen hat. - Die Kinder beginnen von selbst die Dinge, die sie ausführen, aufzuschreiben. Die Kinder schreiben ihre eigenen kleinen Bücher mit Regeln usw.

In allen Übungen ist die Vorübung für die nächste Übung enthalten.

Aus der Arbeit mit dem Material lassen sich bestimmte Regeln ableiten -

Es vermittelt konkrete Vorstellungen über:

Geometrische Verhältnisse
Algebraische Formen und
Das Dezimalsystem.

Das Material erlaubt die Ausführung großer Operationen.

Einführung über das Finden der gemeinsamen Multiplikationszahl.

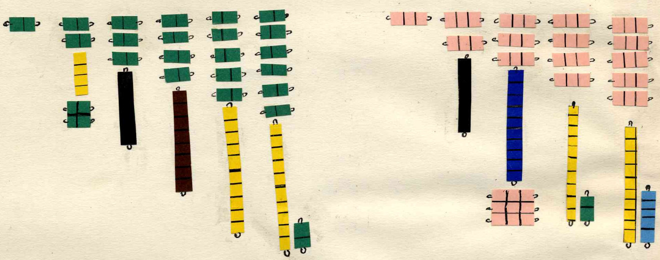
(siehe Beilage)

Es besteht ein großer Unterschied zwischen dem Lehren der Mathematik und dem Vorbereiten des mathematischen Geistes.

Finding the Multiples of a Number

Working with Beads

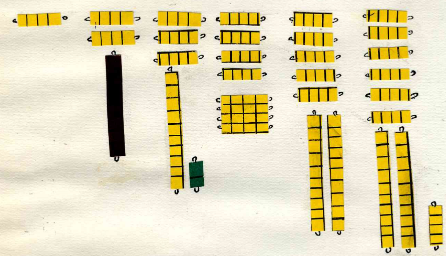
2 3



First

Step : We ask the child to build up several time-tables with the beadstairs. Always when a sqare-number appears it is exchanged for the corresponding sqare. Underneath each multiplication the result is placed in beads too.

4

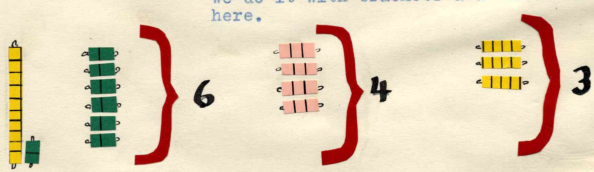


In our example we have chosen the tables of 2; 3; and 4 . We were interested in the factor 12. We wanted to see how the 12 can be organised in different ways.

Second

Step : We show the child how to write down the different ways one factor can be organised. Doing this the child gets aware of the different multiples in one number.
We do it with brackets and numbercards as shown here.

a)



a) We Lay it with beads, brackets and numbercards

b) We write it down on a péece of paper

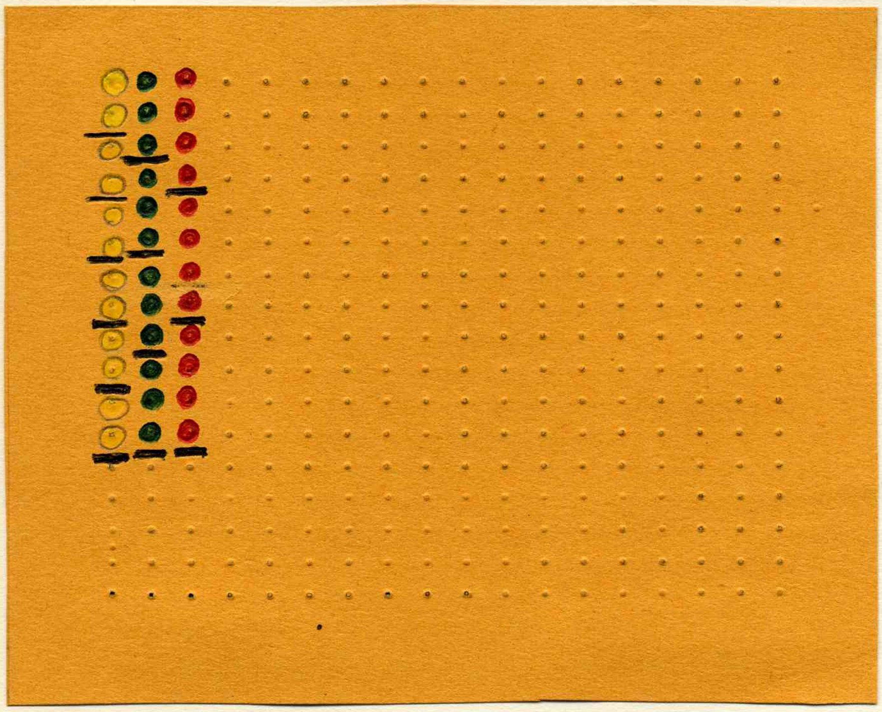
b) 12 is a multiple of :

2 by the agency of 6 ; 3 by agency of 4 ; 4 by agency of 3 6 by agency of 2 (The latter is not laid out here. The child may come to this conclusion without laying out the table of 6)

Finding the Common Multiple of Several Numbers

Working on the Peggoty Board

We want to find the common multiple of 2, 4 and 3.



First Operation:
We represent 2 by 2 yellow pegs, 3 by 3 green pegs, 4 by 4 red pegs and put them on the peggoty-board as shown here.

Second operation:
Always the shortest line is allowed to be repeated by its own number until it reaches the level of the longest line present.

Here we repeat the 2 since this is the shortest line. To destinguish the different steps we put after each repetition a black piece of paper.

We have reached the level of the 4. Now the 3 is repeated. Then the 2, then the 4, then the 2, then the 3, then the 2, then the 4, and then the 3. And 2.
Now all three numbers have reached the same level

The smallest common multiple is 12

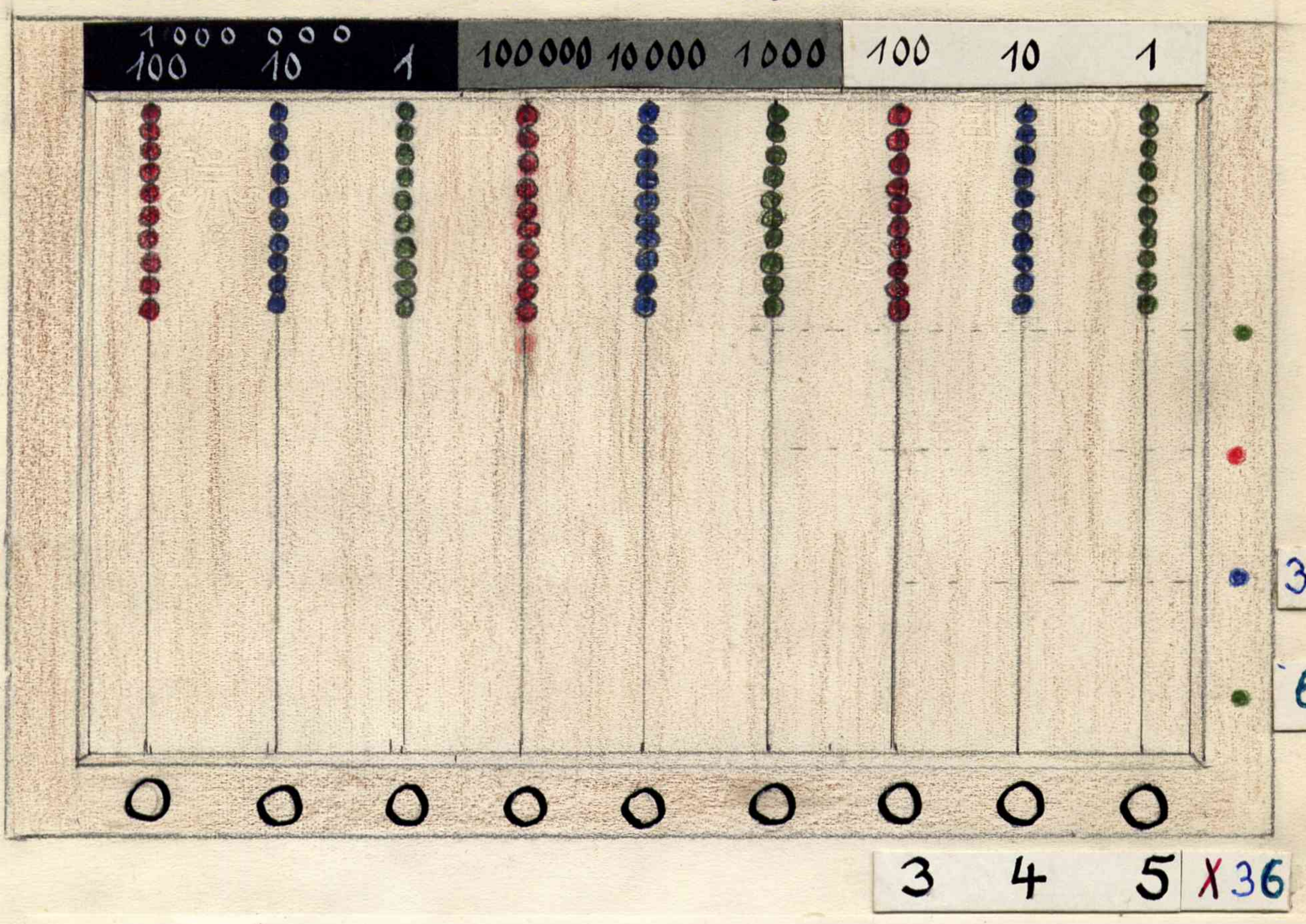
The child can clearly see that 12 can be represented by

2 x 6 or 6 x 2
3 x 4
4 x 3

Purpose: This is only the very first introduction of the law of finding the common multiple, though the law will not be drawn directly from this exercise.

Agegroup:

The Flat Frame



The Flat Frame is very much alike the big frame.
With this one we can do operations with bigger numbers.

On top there are the indicating values and at the bottom underneath each value we find a zero.

The child can do any operation with it.
- Addition - Subtraction - or Multiplication.-

In our example we are asked to multiply 345 by 36.

The child writes the numbers on different stripes of paper as shown here and puts them on the corresponding places (In our example they have been placed underneath, so that it can be seen what normally would be covered.)

First operation:- Turn down the 30 since we are going to multiply by the units first. -

6 x 5=30 .	Three tens are taken down. Units we have none.
6 x 40=240 .	2 hundreds and 4 tens are taken down.
6 x 300=1800.	1 thousand and 8 hundreds are taken down. Since we are not allowed to leave 10 beads down we are exchanging them for 1 thousand-bead pushing all hundreds back in their place.

Second operation: - Turn down the 6 and turn up the 30 and move the multiplicant number one step to the left so that the zero of the units appears. Now we multiply with the tens.

30 x 5=150 .	We take down 3 tens, exchange the tens for 1 hundred and take down 2 tens. Then we take down 1 hundred.
30 x 40=1200 .	We take down 1 thousand ~~and~~ and 2 hundreds.
30 x 300=9000 .	We take down 9000, exchange the thousands into tenthousands and take down the still missing 2 thousands.

Third operation: We can read the result.

When we introduce this frame the child does not write anything down. This would be the first stage.

The second stage is: The child writes down every single process. Every number he puts down he writes on prepared or later unprepared paper (see Apparatusbook1). When one number has been multiplied all beads are pushed back. The zero which appears after the first prozess is over is written underneath the units of the first operation. This of course will be repeated in all following prozesses.

The third stage is: Writing down without the zeros which only were a help to remember the right place for the new numbers.

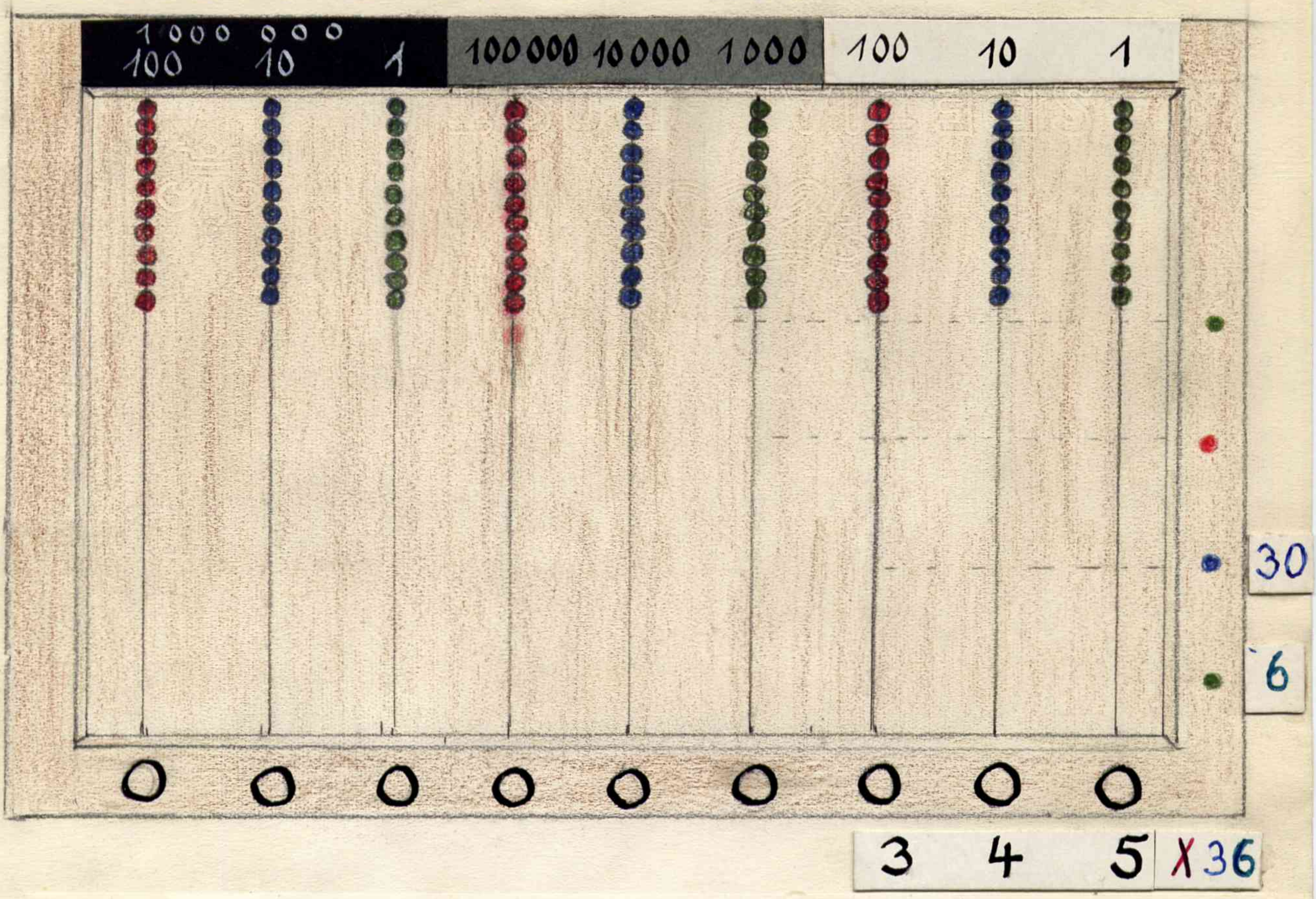
The fourth stage is: The child works without the frame.

The purpose of this frame is: To make clear the position of the different numbers and their functioning. The subconscious of the child is prepared to work with this frame. The child has worked with the number-cards in different ways already. (Bank-game and other operations)

Agegroup:

Any agegroup from 6 1/2 onward

The Flat Frame



The Flat Frame is very much alike the big Frame.
With this one we can do operations with bigger numbers.

On top there are the indicating values and at the bottom underneath each value we find a zero.

The child can do any operation with it.
- Addition - Subtraction - or Multiplication.-

In our example we are asked to multiply 345 by 36.

The child writes the numbers on different stripes of paper as shown here and puts them on the corresponding places (In our example they have been placed underneath, so that it can be seen what normally would be covered.)

First operation:- Turn down the 30 since we are going to multiply by the units first. -

6 x 5=30 . Three tens are taken down. Units we have none.

6 x 40=240 . 2 hundreds and 4 tens are taken down.

6 x 300=1800. 1 thousand and 8 hundreds are taken down. Since we are not allowed to leave 10 beads down we are exchanging them for 1 thousand-bead pushing all hundreds back in their place.

Secdnd operation: - Turn down the 6 and turn up the 30 and move the multiplicant number one step to the left so that the zero of the units appears. Now we multiply with the tens.

30 x 5=150 . We take down 3 tens, exchange the tens for 1 hundred and take down 2 tens. Then we take down 1 hundred.

30 x 440=1200 .We take down 1 thousand ~~and~~ and 2 hundreds.

30 x 300=9000 .We take down 7000, exchange the thousands into 1 tenthousands and take down the still missing 2 thousands.

Third operation: We can read the result.

When we introduce this frame the child does not write anything down. This would be the first stage.

The second stage is: The child wiites down every single process. Every number he puts down he writes on prepared or later unprepared paper (see Apparatusbook1). When one number has been multiplied all beads are pushed back. The zero which appears after the first prozess is over is wiritten underneath the units of the first operation. This of course will be repeated in all following prozesses.

The third stage is: Writing down without the zeros which only were a help to remember the right place for the new numbers.

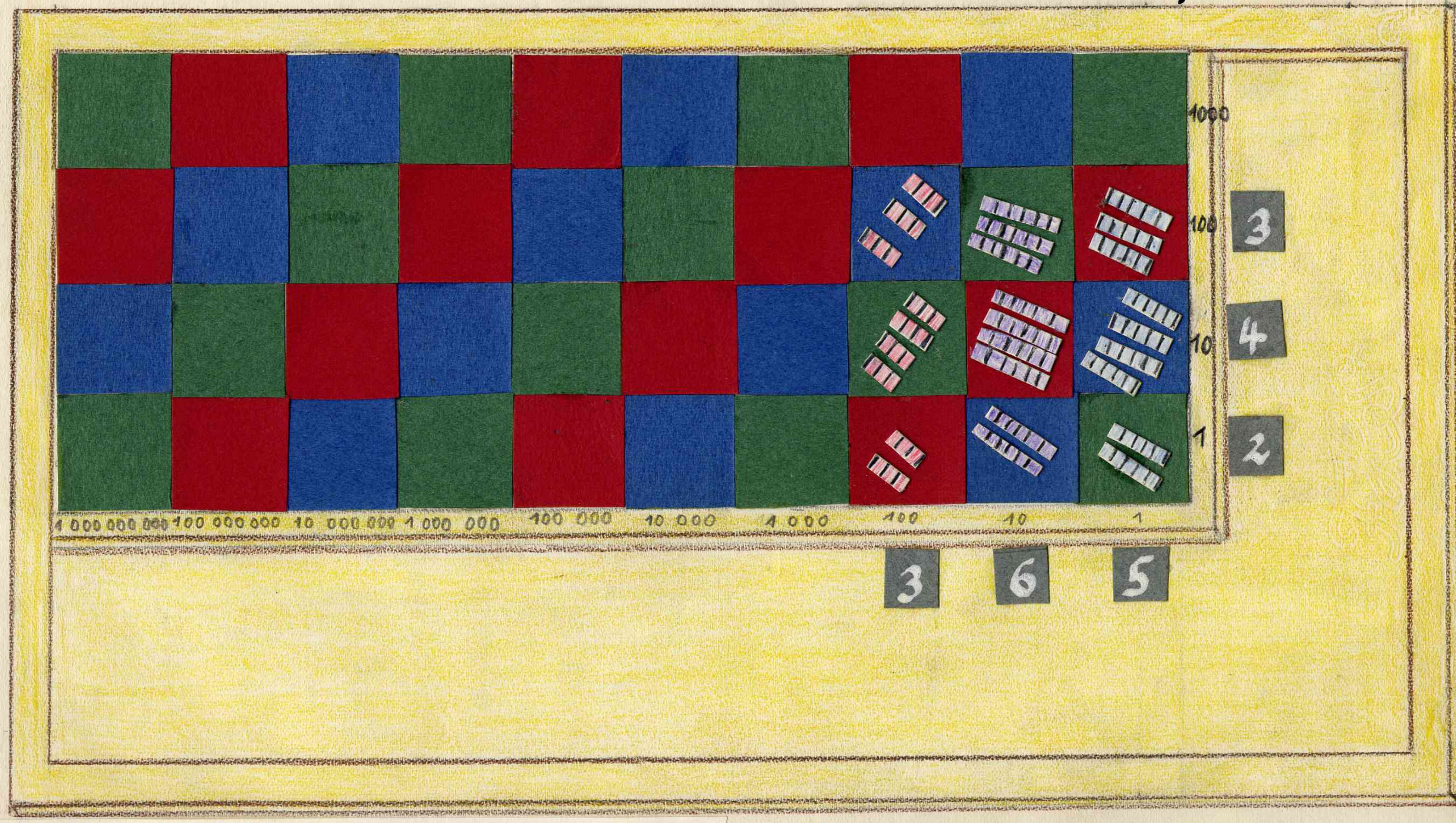
The fourth stage is: The child works without the frame.

The purpose of this frame is: To make clear the position of the different numbers.and their functioning. The subconscious of the child is prepared to work with this frame. The child has worked with the number-cards in different ways already. (Bank-game and other operations)

Agegroup:

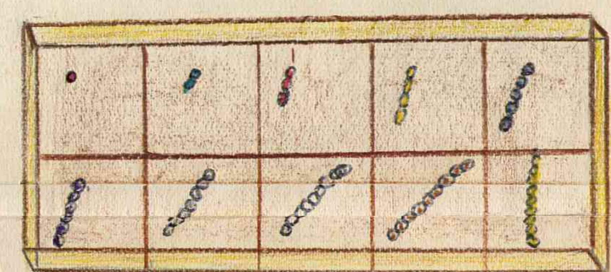
Any agegroup from 6 1/2 onward

The Checkerboard for Multiplication

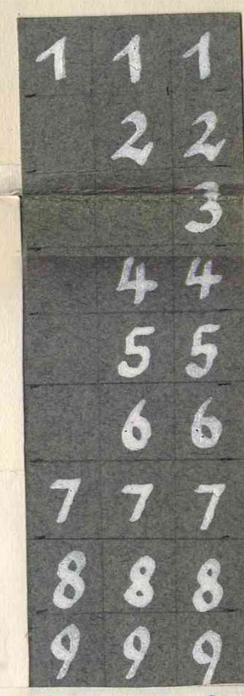


The child is asked to multiply 365 × 342 =

He lays the corresponding numbers underneath its prpper place. The multiplicator is placed on the vertical side and the multiplicant is placed on the horizontal side.



This box contains the number-beads from 1 - 10.
Each number is represented about 20 times.



These numbers from 1 - 10 are represented in 3 sets. They are really cut out numbers. They are used to form the multiplicant as well as the multiplicator.

Bothe ,the numbers and the box should be placed beside the checkerboard.

First operation: 365 is multiplied by two.
The 5 is placed 2x on the green unit board.
The 6 is placed 2x on the blue ten board.
The 3 is placed 2x on the red hundred board.

Second operation: 365 is multiplied by fourty.
Instead of writing a zero we start placing the numbers on the ten board.
The 5 is placed 4x on the blue ten board.
The 6 is placed 4x on the red hundred board.
The 3 is placed 4x on the green ~~te~~thousand board.

Third operation: 365 is multiplied by 300.
Instead of writing two zeros we start placing the numbers on the hundredboard.
The 5 is placed 3x on the red hundredboard.
The 6 is placed 3x on the green thousand board.

Fourth operation:
Now the sums have to be added.
All beads are brpught down to their corresponding place at the bottom.
We will have:
Two 5's on the unit board.
Two 6's and four 5's on the tes board.
Two 3's , four 6's and three 5's on the hundred board.
Four 3's and three 6's on the thousand board.
Three 3's on the tenthousand-board.
Now the quantities are added up and are exchanged so that we do not have mre than 9 units on one place.
Then the result can be read.
In our example the result is:

124 830

First stage: The operation is done as shown here. There is no writing.

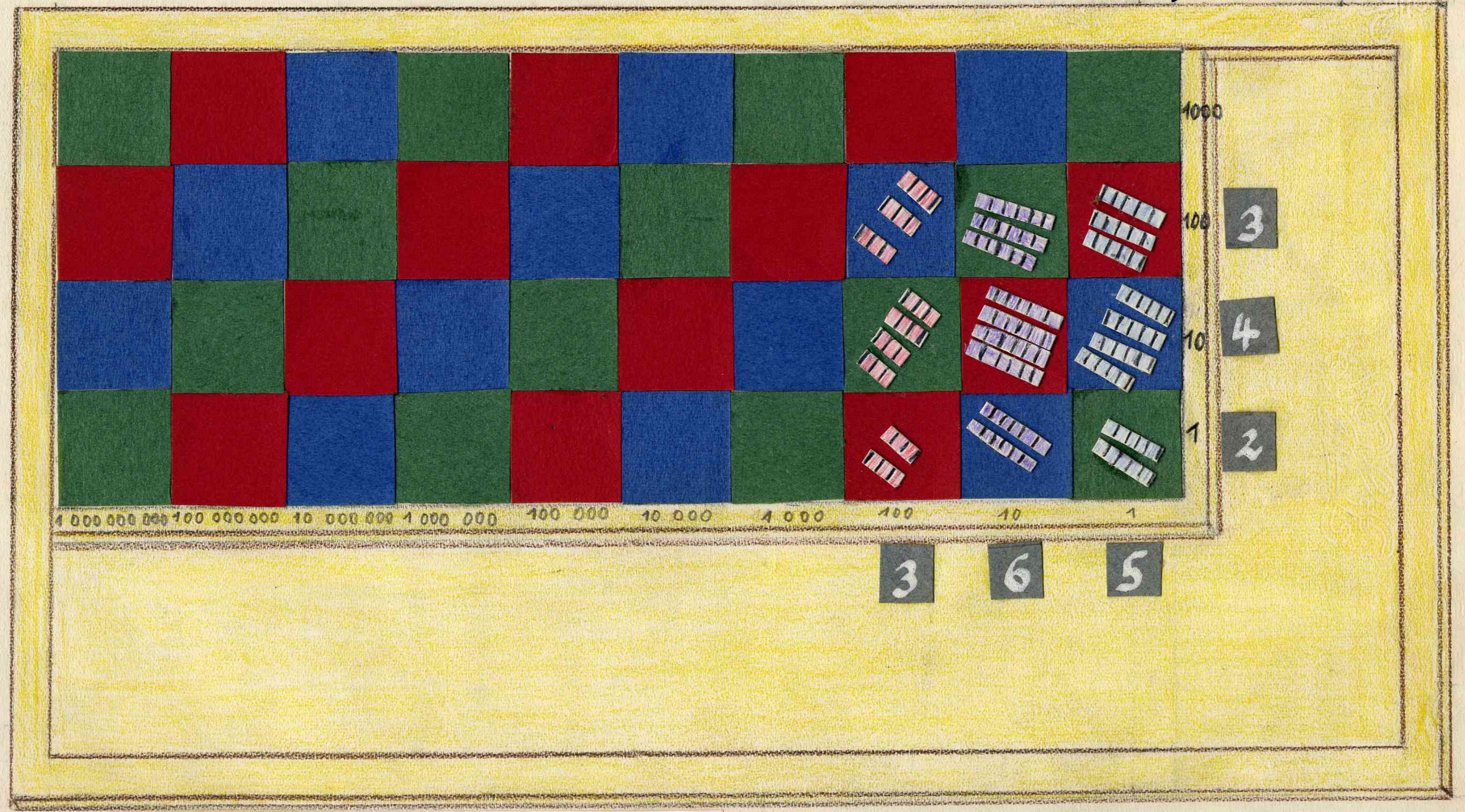
Second stage: The single operations of multiplication are done by heart so that only very little adding and exchanging has to take place in the end.

Third stage: We show the child how to write down ~~the~~ the whole pperation without the checker board. (See next page "The Contracted Multiplication")

Purpose: Indirect preparation for Squareroot and Algebra

Agegroup: Any age after 6 1/2 years.

The Checkerboard for Multiplication



The child is asked to multiply 365 × 342 =

He lays the corresponding numbers underneath its prpper place. The multiplicator is placed on the vertical side and the multiplicant is placed on the horizontal side.

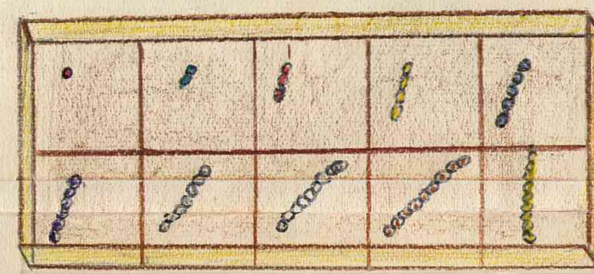
First operation: 365 is multiplied by two.
The 5 is placed 2x on the green unit board.
The 6 is placed 2x on the blue ten board.
The 3 is placed 2x on the red hundred board.

Second operation: 365 is multiplied by fourty.
Instead of writing a zero we start placing the numbers on the ten board.
The 5 is placed 4x on the blue ten board.
The 6 is placed 4x on the red hundred board.
The 3 is placed 4x on the green ~~te~~thousand board.

Third operation: 365 is multiplied by 300.
Instead of writing two zeros we start placing the numbers on the hundredboard.
The 5 is placed 3x on the red hundredboard.
The 6 is placed 3x on the green thousand board.

Fourth operation:
Now the sums have to be added.
All beads are brpught down to their corresponding place at the bottom.
We will have:
Two 5's on the unit board.
Two 6's and four 5's on the tes board.
Two 3's , four 6's and three 5's on the hundred board.
Four 3's and three 6's on the thousand board.
Three 3's on the tenthousand-board.
Now the quantities are added up and are exchanged so that we do not have mre than 9 units on one place.
Then the result can be read.
In our example the result is:

124 830



This box contains the number-beads from 1 - 10.
Each number is represented about 20 times.

These numbers from 1 - 10 are represented in 3 sets. They are really cut out numbers. They are used to form the multiplicant as well as the multiplicator.

Bothe, the numbers and the box should be placed beside the checkerboard.

First stage: The operation is done as shown here. There is no writing.

Second stage: The single operations of multiplication are done by heart so that only very lit little adding and exchanging has to tak take place in the end.

Third stage: We show the child how to write down ~~the~~ the whole pperation without the checker board. (See next page "The Contracted Multiplication")

Purpose: Indirect preparation for Squareroot and Algebra

Agegroup: Any age after 6 1/2 years.

The Contracted Multiplication

First step: The child writes the numbers of multiplication down as he is used to it while working on the checkerboard at the advanced level.

Example:

1.)
```
 34×
 42
────
```

2.)
```
  34×
  42
─────
  68
136'
─────
```

3.)
```
  34×
  42
─────
  68
136'
─────
1428
```

The child writes only number 3.

Second step: To clarify the facts which are involved in multiplication we show the child to write over the tens and units a corresponding"t" or "u". The multiplicator in addition is marked by a little comma on its upper right hand side.

Example:
```
t u   t'u'
5 6 × 4 2  =
```

When the child starts the multiplication he writes down on his right hand side what he is doing. In the same time he connects the numbers with coloured lines so that it can be seen which numbers have been multiplied with each other.

Example:
```
  56×
  43
─────
 168
224'
─────
2408
═════
```

6 units × 3 units = 18 units
5 tens × 3 units = 15 tens
6 units × 4 tens = 24 tens
5 tens × 4 tens = 20 hundreds

Purpose: Indirect Preparation for Squareroot and Algebra.

Agegroup: From 7 years onward

11. Vortrag am 8. 11. 57 gehalten von Mario Montessori

Weitere Einführung über das Finden des gemeinsamen Nenners

Arbeit auf dem Peggoty Board (siehe Beilage)

Die erste Einführung in das Entstehen der drei Potenzen

Eine Menge, die aus verschiedenen Einheiten besteht, ordnet sich nicht von allein in Gruppen. Es ist der Mensch, der diese Ordnung geschaffen hat. Diese Tatsache spricht dafür, daß der Mensch von Natur aus einen mathematischen Geist besitzt.
M. Montessori stellt an dem Beispiel der Zahl 3 die drei grundlegenden Potenzen dar:

3 x 1 = 3 Die erste Gruppe ist gebildet worden 3^1

Von nun an bestimmt diese Gruppe das Wachstum in die höheren Potenzen.

3 x 3 = 9 Die zweite Potenz wird dadurch erreicht, daß die Gruppe sich mit ihrer eigenen Zahl malnimmt.

Es wird das Quadrat gebildet.

3x3x3 =27 Die dritte Potenz entsteht dadurch, daß wiederum mit der eigenen Zahl malgenommen wird.

Es wird der Würfel gebildet.

Da der Mensch nicht mehr als drei Dimensionen wahrnehmen kann, arbeiten wir in der Geometrie auch nur mit diesen drei Dimensionen. - Linie - Quadrat - Würfel -.
In der Praxis kam der Mensch mit diesen drei Dimensionen nicht aus. Er gebrauchte mehr als nur drei Potenzen.
Das Geheimnis ist jedoch, daß die Dimensionen immer gleich bleiben nur der Rang nimmt zu nach jeder Wiederholung von drei Potenzen.

Das Gesetz, der sich immer in gleicher Weise wiederholenden Dimensionen, ist auf jede beliebige Zahl anwendbar. Die Erreichung der dritten Potenz ist jedesmal der Beginn einer neuen Rangstufe.

(siehe Beilage in Materialbuch Nr. 1)

Teil 2

Einführung des großen Perlenkastens
durch Madame Josten.

Exaktheit ist die erste Regel bei allen Arbeiten, die wir vornehmen.
Das richtige Auf-und Abhängen der Ketten ist äußerst wichtig.
Alter 6 Jahre

1. Lektion:
Wir wählen eine beliebige Zahl zur Illustration, jedoch nehmen wir weder eine der ganz großen noch eine der ganz kleinen Zahlen.
In unserm Beispiel wählen wir die Zahl 5.

Die Lehrerin legt alle Teile, die zur Zahl 5 gehören auf den Tisch.

1. Schritt Die lange Kette wird unter die kurze Kette angepaßt. Die Lehrerin zeigt, daß das Quadrat drauf paßt. Dann werden die Quadrate drunter gelegt. Die Lehrerin zeigt, daß aus den Quadraten der Würfel gebildet werden kann. Der Würfel wird unter die Quadrate gelegt.

2. Schritt Die Namen für die einzelnen Dinge werden gegeben.
Das ist die kurze Kette der 5
Das ist die lange Kette der 5
Das ist das Quadrat der 5
Das ist der Würfel der 5

Es folgen die zwei weiteren Schritte der Dreistufen-Lektion nämlich : Das Kind reicht die verschiedenen Dinge der Lehrerin oder tut etwas Entsprechendes und dann antwortet das Kind auf die Frage "Was ist dies? Was ist das?"

Diese Übung ist durch das Dezimalsystem vorbereitet. Dies ist die sensorische Einführung in das Material. Interessant sind auf dieser Stufe vor allem die verschiedenen Formen und Längen die mit den Ketten und Quadraten und Würfeln gebildet werden können.

Verschiedene Übungen: Die Ketten können alle nebeneinander gelegt und mit den entsprechenden Einmaleinszahlen versehen werden. Daselbe kann auch mündlich gemacht werden, indem das Kind die Kette durch seine Finger gleitenläßt und jedesmal die entsprechende Einmaleinszahl nennt.

Das Kind befindet sich in diesem Alter noch in dem Stadium, in dem es die Dinge in erster Linie mit seinen Sinnen wahrnimmt.
Das Kind ist interessiert am Zählen und die Kinder findendihre eigenen Probleme. (Beispiel: Kinder addieren alle Perlen, die im großen Kettenrahmen enthalten sind)

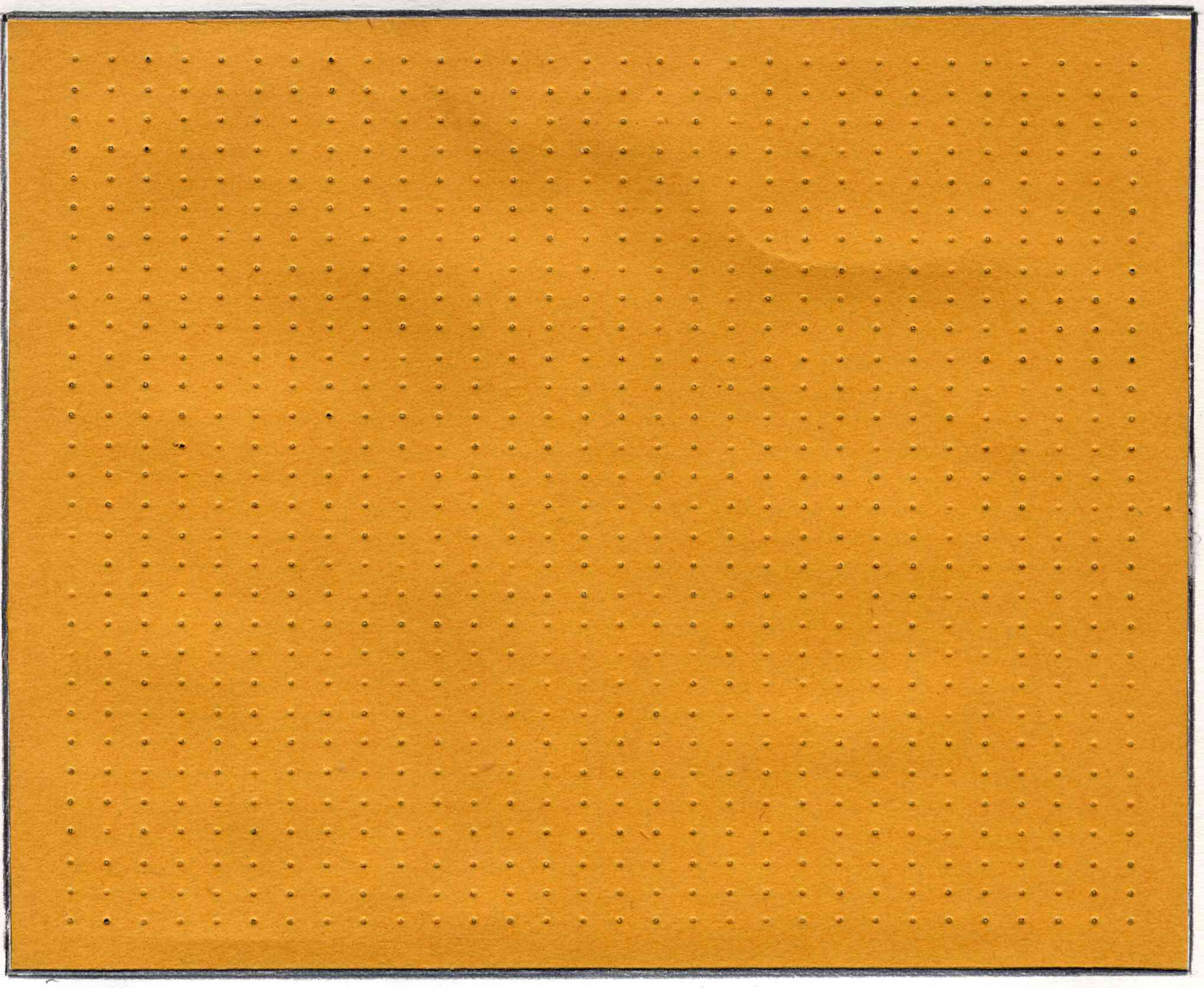
Nähere Betrachtung des Quadrates und Einführung der schriftlichen Benennung.

Einzelne Additionen mit verschiedenen Quadraten werden durchgeführt und gleichfalls aufgeschrieben.

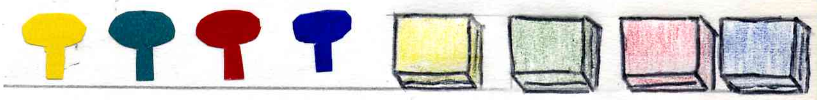
Nähere Betrachtung des Würfels und Einführung der schriftlichen Benennung.

Einzelne Additionen mit verschiedenen Würfeln werden durchgeführt und gleichfalls aufgeschrieben.

The Peggoty Board



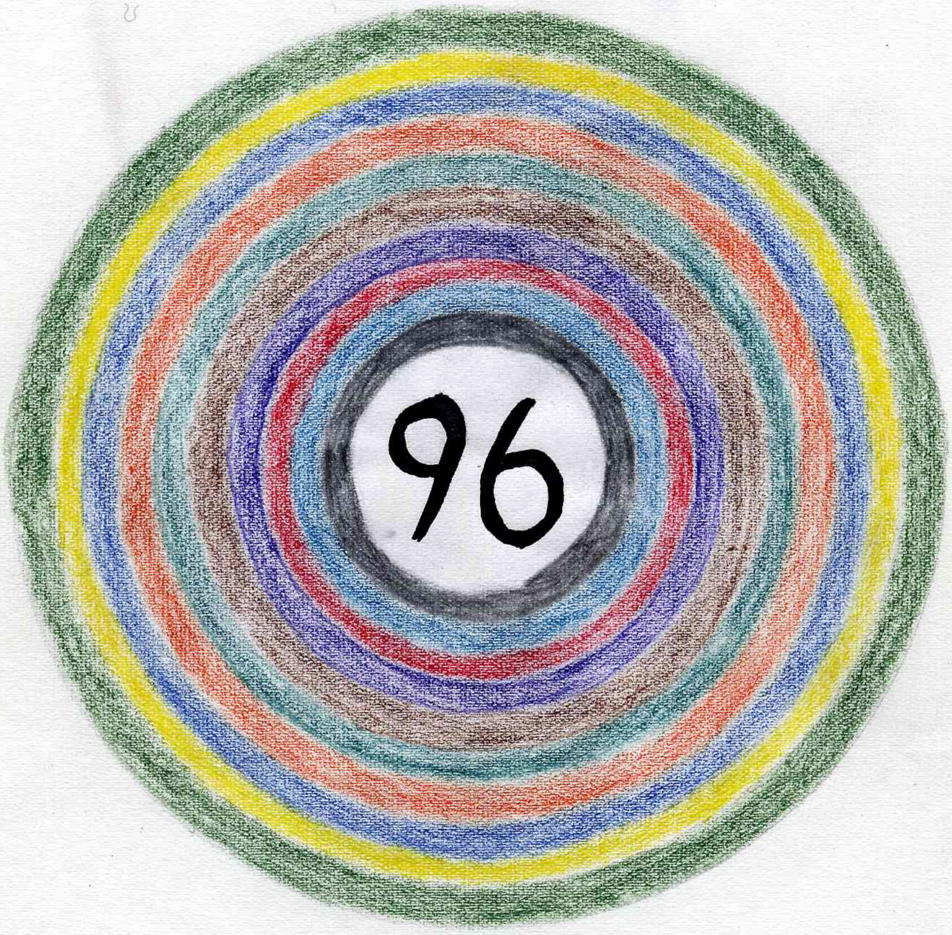
There are several of these PEGGOTY BOARDS . They have different sizes. This one represented here should have 40 x 40 holes. Another board has 20 x 33 holes.

Along with the peggoty board are used the PEGS OF DIFFERENT COLOURS. 

The Board is used to represent

DIFFERENT KINDS OF MULTIPLICATION especially THE SQUAREROOT.

The Multiples of the Number 96



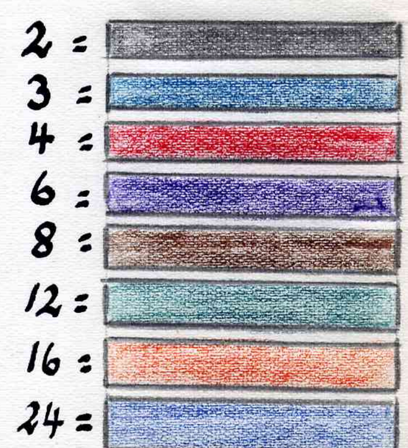
2 × 48

3 × 32

4 × 24

6 × 16

8 × 12



Researchin Prime Numbers

	2	3		5		7			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Primenumbers can be devided only by themselves.

When we mark all the successive numbers of the Primenunmbers then all the numbers which are not marked can easily be recognised as prime-numbers too. We also can see that they appear at regular intervals.

Series of Successive Multiples

2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

12. Vortrag am 11. 11. 57 gehalten von Madame Josten

Einführung in die Arbeit mit dem großen Kettenkasten Teil 2

1. Das Material kann als Sinnesmaterial benutzt werden.
Die kurzen sowohl als auch die langen Ketten können abgenommen werden und in die entsprechenden Vielecke geformt werden.
Dreieck Quadrat Fünfeck Sechseck Siebeneck Achteck

Neuneck Zehneck

Man fragt das Kind:"Kannst Du eine Form mit der Einer- oder Zweierkette legen?" Die Antwort ist natürlich "Nein."

Die Vielecke können auch ineinander gelegt werden.

In ähnlicher Weise können die Würfel der verschiedenen Zahlen geordnet werden. Turm und Treppe lassen sich damit herstellen.

2. Das Material wird in seinem konkreten Zahlenwert erkannt.
Die gleichen Arbeiten wie unter(1) werden vorgenommen jetzt aber mit den bereitstehenden Zahlenkarten versehen.

5 Kinder legen ein Pentagon mit der Fünferkette. Jedes legt an seine Stelle den ensprechenden Wert an. In die Mitte kann der Fümferwürfel gelegt werden.

Der Lehrer fragt das Kind: (Multiplikation)
"Lege das Fünferquadrat 2 mal. Wieviel Perlen sind es im ganzen?" "50"
" " " 3 " " " "75"
" " " 4 " " " "100"
" " " 5 " " " "125"

Können wir für 125 auch noch etwas anderes als die einzelnen Quadrate legen? Ja, den Würfel.

Der Lehrer fragt das Kind: (Division)
" Hole den Achterwürfel wir wollen ihn in zwei teilen"
Um ihn zerteilen zu können müssen wir die 8 losen Quadrate holen und ausbreiten. Wenn wir sie in 2 teilen erhalten wir 2 x 4 Quadrate. Wenn wir sie in 4 teilen erhalten wir 4 x 2 Quadrate. Wenn wir sie in 8 teilen erhalten wir 8 x 1 Quadrat.

Wenn das Kind schon mit den Zahlensymbolen für Quadrat und Würfel vertaut ist, kann das ganze in Symbolen gelegt werden.

$8^3 : 2 = 8 \times 8^2 : 2 = 4$ eight^2

Das Zuordnen von Quantität und Symbol

Alle Quadrate werden untereinandergeordnet.
Beispiel:(~~Hunderter~~quadrat) Zehner $\boxed{10 \times 10} = \boxed{10^2} = \boxed{100}$

Das Zuordnen von Quantität und Symbol

Alle Würfel werden untereinander geordnet.
(Tausenderwürfel)  $= 10 \times 10 \times 10 = 10^2 \times 10 = 10^3 = 1000$
(Wenn die Kinder mit dem Material vertraut sind kann ein nettes Frage + Antwortspiel gemacht werden)

Alle Zahlen von 1 - 9 werden im Perlenmaterial ausgelegt und sowie die Quadratzahl erscheint, wird an Stelle der einzelnen Perlenstäbchen das Quadrat gelegt.

Darunter wird das ganze in Zahlsymbolen ausgedrückt. (siehe Beilage)

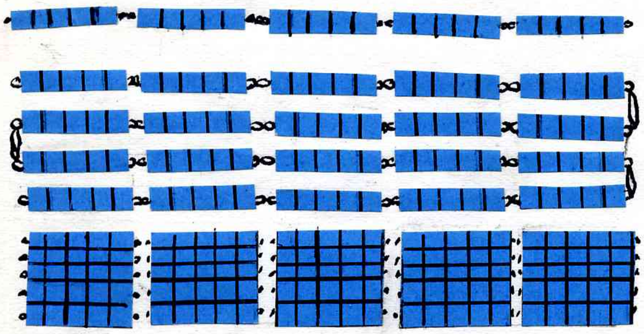
Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Würfeln wird ausgerechnet.
Beispiel: $= 4^3 = 3^3 + 4^2 + (2 \times 3^2) + 1 \times 3$
$= \quad = 27 + 16 + 18 + 3$

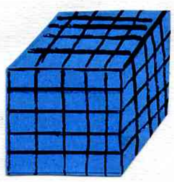
Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadraten wird ausgerechnet.
Beispiel: $= 4^2 = 3^2 + 1 + 2 \times 3$
$16 = 9 + 1 + 6$

Es zeigt sich bei dieser Aufstellung, daß die Zahlen kontinuierlich zunehmen.

Einführung in die einfache lange Division (Siehe Materialbuch 1)

Sensorial Introduction of the Chains, Squares, and Cubes.

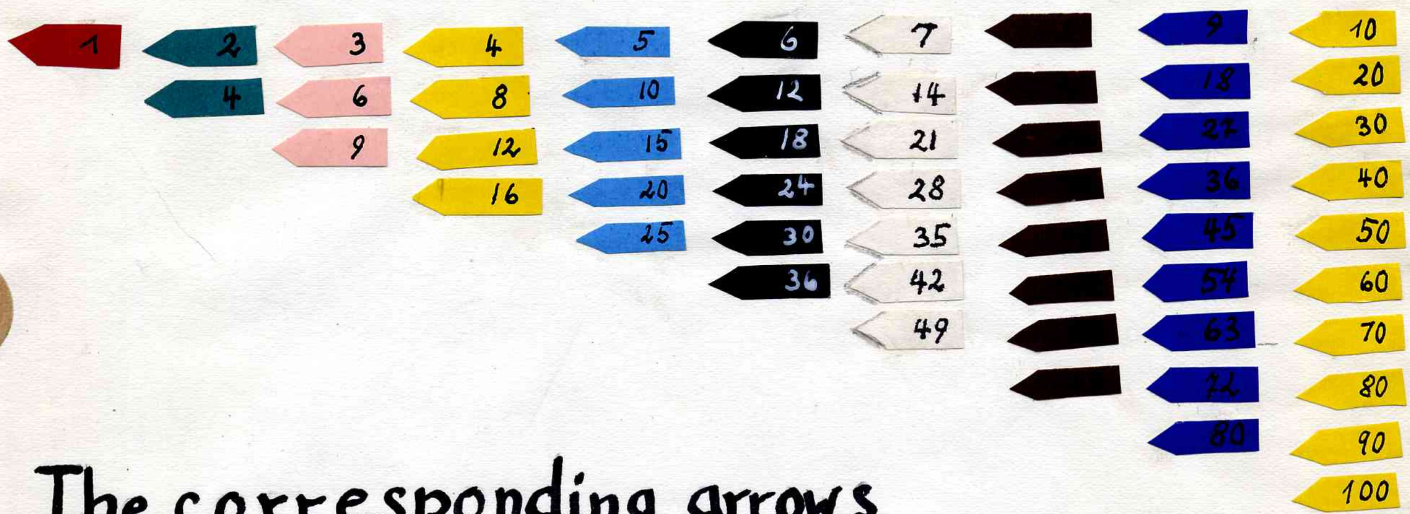




In our Example we chose number 5 for giving the first introduction of the chains, the square and the cube.
The teacher takes all these things very carefully from the big Chains -Box and lays them down on a mat.

The teacher starts with the short chain. Then he fits the long chain along the short chain as shown here. Then he takes the squares and by putting them on top of the sqares which have been formed by the long chain he shows that they match. Then he lays the Squares underneath the long chain as shown here. Then he takes the sqares again builds up a cube and shows in this way that they are equal to the cube. He puts the Squares back to theit place and puts the cube underneath.
He gives the names.
Following this introduction the two further steps of the three period lesson take place.

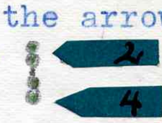
The Arrows with the numbers for the short chains.



The corresponding arrows for the long chains are made in the same way.

The arrows can be associated with the beadstairs of the chains in very different ways.

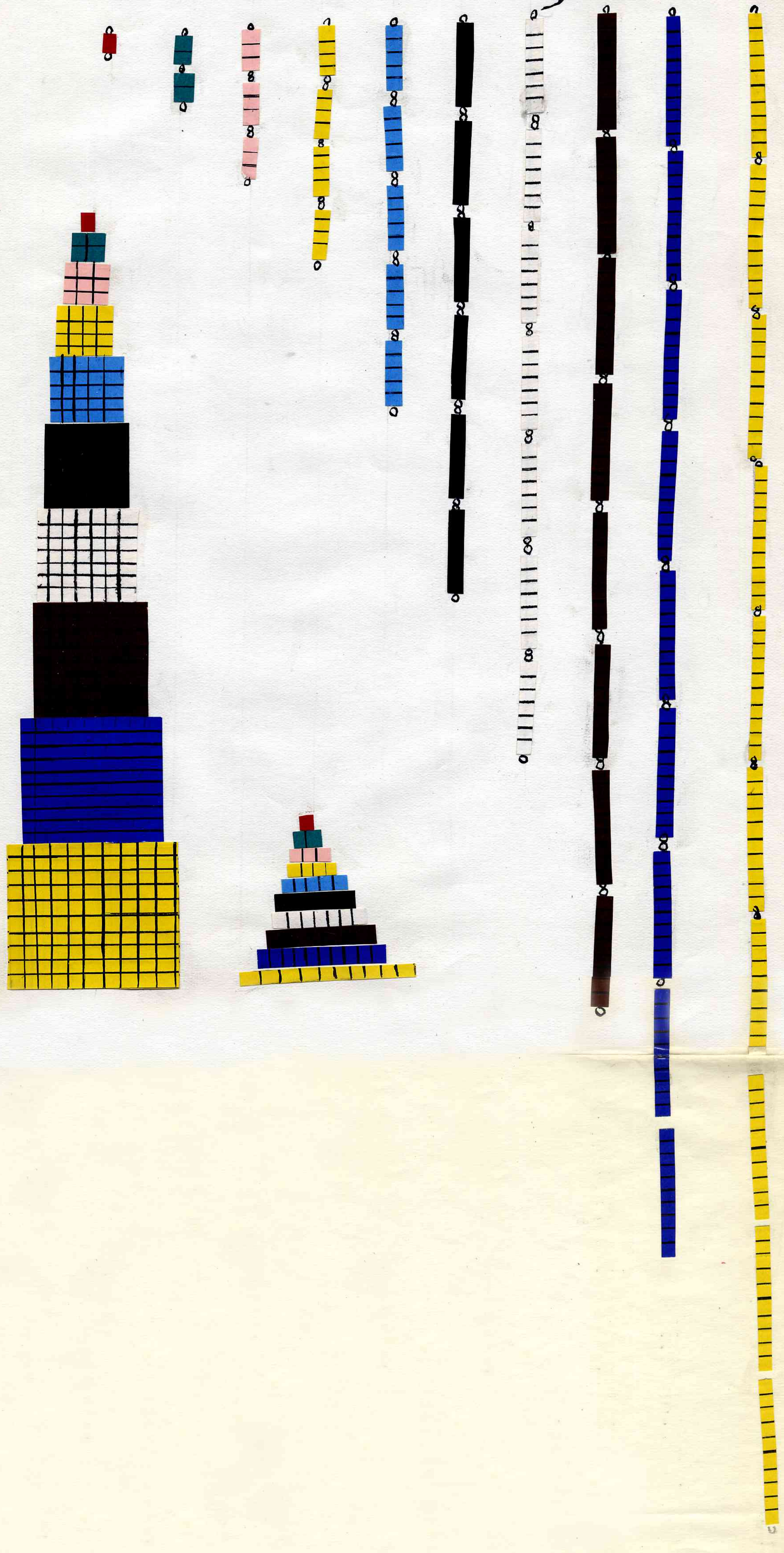
a) Each chain can be laid out vertically and the arrows can be attached to the appropriate intervals.



b) The child can lay out different geometrical patterns with the chains and the arrows can still be attached to the appropriate intervals.

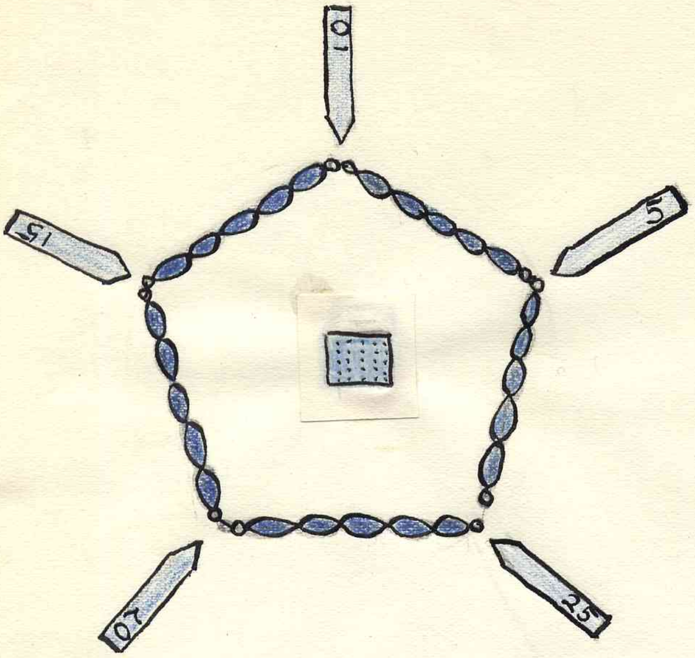
Work with the Chains, Squares and Cubes in a Sensorial Way

The long chains are missing here,



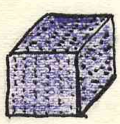
Forming Groups in different Ways

Multiplication or Addition

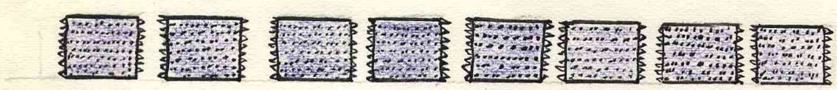


5 Children lay a Pentagon with the long chain of 5 and lay down the corresponding arrows to the appropriate intervals. The whole sum is represented by the cube.
(The picture shows the same with the short chain)

Division



We want to devide this cube into two groups



We have to exchange it first for the 8 squares

Then we can form 2 groups

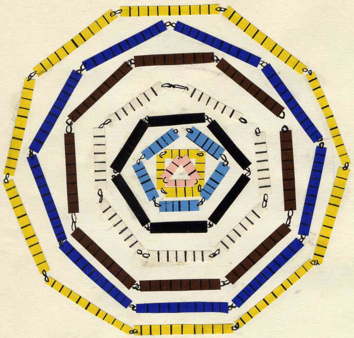
Now we can lay down with cards:

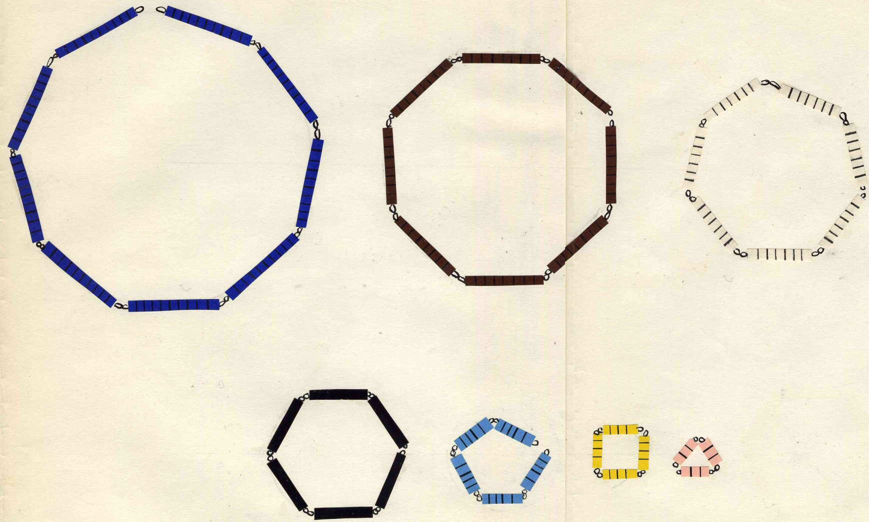
$$8^3 : 2 = 8^2 \times 8 : 2 = 8^2 \times 4$$

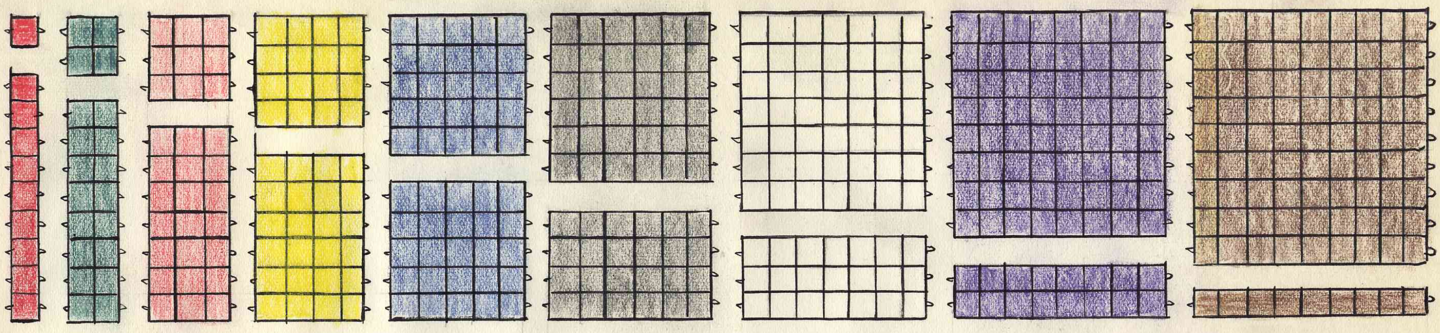
We want to form 4 groups

$$8^3 : 4 = 8^2 \times 8 : 4 = 8^2 \times 2$$ ← This is the result.

Working with the Short or Long Chains in a Sensorial Way





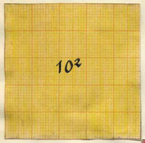


Manipulation and Calculation with the Bead-Stairs

$$\begin{array}{llllllll}
10 & = 1 + 9 & = & 1^2 + 9 & & & \\
 & & & & 7 & & \\
20 & = 4 + 16 & = & 2^2 + 16 & & 2 \\
 & & & & 5 & & \\
30 & = 9 + 21 & = & 3^2 + 21 & & 2 \\
 & & & & 3 & & \\
40 & = 16 + 24 & = & 4^2 + 24 & & 2 \\
 & & & & 1 & & \\
50 & = 25 + 25 & = & 5^2 + 25 & & 0 \\
 & & & & 1 & & \\
60 & = 36 + 24 & = & 6^2 + 24 & & 2 \\
 & & & & 3 & & \\
70 & = 49 + 21 & = & 7^2 + 21 & & 2 \\
 & & & & 5 & & \\
80 & = 64 + 16 & = & 8^2 + 16 & & 2 \\
 & & & & 7 & & \\
90 & = 81 + 9 & = & 9^2 + 9 & & &
\end{array}$$

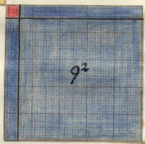
Manipulation and Calculation with the Squares.

The same can be done with the cubes.



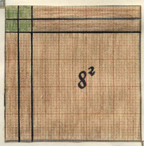
$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$100 - 81 = 19$



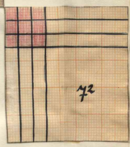
$9^2 = 9 \times 9 = 81 + 1^2 + 2 \times 9 = 100$

$81 - 64 = 17$



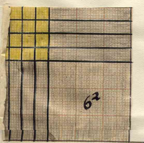
$8^2 = 8 \times 8 = 64 + 2^2 + 4 \times 8 = 100$

$64 - 49 = 15$



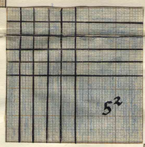
$7^2 = 7 \times 7 = 49 + 3^2 + 6 \times 7 = 100$

$49 - 36 = 13$



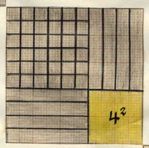
$6^2 = 6 \times 6 = 36 + 4^2 + 8 \times 6 = 100$

$36 - 25 = 11$



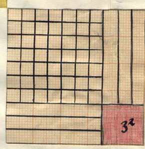
$5^2 = 5 \times 5 = 25 + 5^2 + 10 \times 5 = 100$

$25 - 16 = 9$



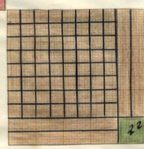
$4^2 = 4 \times 4 = 16 + 6^2 + 8 \times 6 = 100$

$16 - 9 = 7$



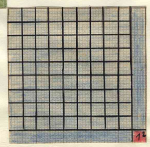
$3^2 = 3 \times 3 = 9 + 7^2 + 6 \times 7 = 100$

$9 - 4 = 5$



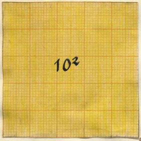
$2^2 = 2 \times 2 = 4 + 8^2 + 4 \times 8 = 100$

$4 - 1 = 3$



$1^2 = 1 \times 1 = 1 + 9^2 + 2 \times 9 = 100$

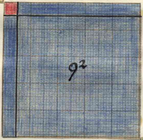
Manipulation and Calculation with the Squares.



$10^2 = 10 \times 10 = 100$

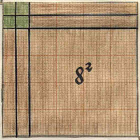
$100 - 81 = 19$

The same can be done with the cubes.



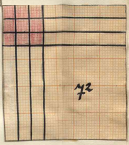
$9^2 = 9 \times 9 = 81 + 1^2 + 2 \times 9 = 100$

$81 - 64 = 17$



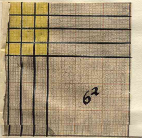
$8^2 = 8 \times 8 = 64 + 2^2 + 4 \times 8 = 100$

$64 - 49 = 15$



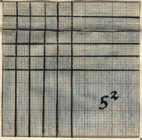
$7^2 = 7 \times 7 = 49 + 3^2 + 6 \times 7 = 100$

$49 - 36 = 13$



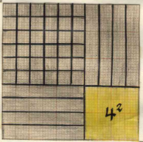
$6^2 = 6 \times 6 = 36 + 4^2 + 8 \times 6 = 100$

$36 - 25 = 11$



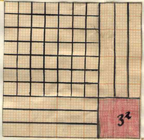
$$5^2 = 5 \times 5 = 25 + 5^2 + 10 \times 5 = 100$$

$$25 - 16 = 9$$



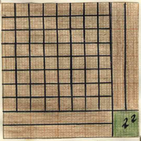
$$4^2 = 4 \times 4 = 16 + 6^2 + 8 \times 6 = 100$$

$$16 - 9 = 7$$



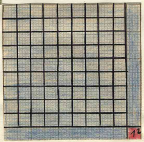
$$3^2 = 3 \times 3 = 9 + 7^2 + 6 \times 7 = 100$$

$$9 - 4 = 5$$



$$2^2 = 2 \times 2 = 4 + 8^2 + 4 \times 8 = 100$$

$$4 - 1 = 3$$



$$1^2 = 1 \times 1 = 1 + 9^2 + 2 \times 9 = 100$$

Das Kind muß alle Ergfahrungen selbst machen und alle Stadien durchlaufen, um ein Glied der Gemeinschaft zu werden. So findet zuerst eine Trennung von den Erwachsenen und eine starke Bindung an die eigene Gruppe statt.

Welche Dinge beeinflussen die Vorstellung der Kinder?

Persönlichkeiten,die aus der Menge hervorragen, d. h. alle Heldenfiguren wecken das Interesse der Kinder. Der Wunsch,diesen Bildern gleich zu sein,beseelt sie.

Das Kind sowohl wie auch die Kindergruppe möchte unabhängig vom Erwachsenen sein. Sie wollen unter sich sein. Die Kinder bauen sich ihre Laubhütten. Sie halten sich dort auf,auch wenn es regnet. Sie kochen sich ihre eigenen Mahlzeiten und essen sie, auch wenn es nicht so gut schmeckt,wie bei Muttern.

Das typische Merkmal dieses Alters ist:

Das Vollbringen großer Arbeiten,ohne müde zu werden.

Die Verehrung des Heldentums kann von einem Diktator für ein schlechtes Ziel ausgenutzt werden so wie es von der Bewegung der Pfadfinder z. B. zum Guten ausgenutzt wird. Daraus ergibt sich, daß die Tendenz der Verehrung allein noch nach keiner Seite festgelegt ist.

2. Teil gehalten von Madame Josten

Einführung in die Gruppendivision (siehe auch Materialbuch 1)

Beispiel:

2879 : 12 = 239 R 11

Probe: (239 x 12) + 11 =

Diese Probe kann auf einem andern Material gerechnet werden. (Schachbrett oder Großer Rechenrahmen)

.....

1. Schritt
Nur Ergebnis schreiben

12 / 2879 \ 239 R 11
47
119

2. Schritt
Jede neue Operation wird aufgeschriben aber ohne Rest weil sich das in der Arbeit ergibt.

12 / 2879 \ 239 R 11
24
47
36
119
108
11

3. Schritt
Wie (2) nun aber mit Aufschreiben der Ausrechnung des jeweiligen Restes.

werden. Man kann den Kindern in ihrer Arbeit helfen, indem man ihnen genau zeigt, wie man eine Arbeit in Angriff nehmen muß. Dadurch kann man vermeiden, daß die Kinder vorzeitig müde werden.

Die Kinder arbeiten ohne ein ökonomisches Ziel vor Augen zu haben. - Der Drang, fähig zu sein, etwas Großes zu vollbringen, gibt ihnen die Kraft des unermüdlichen Tätigseins. -

2. Teil Über die Einführung des Findens des "Größten gemeinsamen Nenners" (siehe Beilage)

Nach der Arbeit mit den Steckern auf dem Peggoty Board haben wir gefunden, daß 12 gleich 6 x 2 ist

2 x 6
3 x 4
4 x 3

Das gleiche kann mit andern Zahlen ausgeführt werden. Z.B. 24 = 12 groups of 2

24 =	12	groups of	2	
	8	" "	3	
	6	" "	4	Dies sind die Faktoren von 24
	2	" "	12	
	3	" "	8	

Z.B. 36 =	12	- - - -	3	
	6	- - - -	6	
	4	- - - -	9	Der größte gemeinsame ~~Nenner oder~~ Faktor ist 12.
	3	- - - -	12	
	2	- - - -	8	

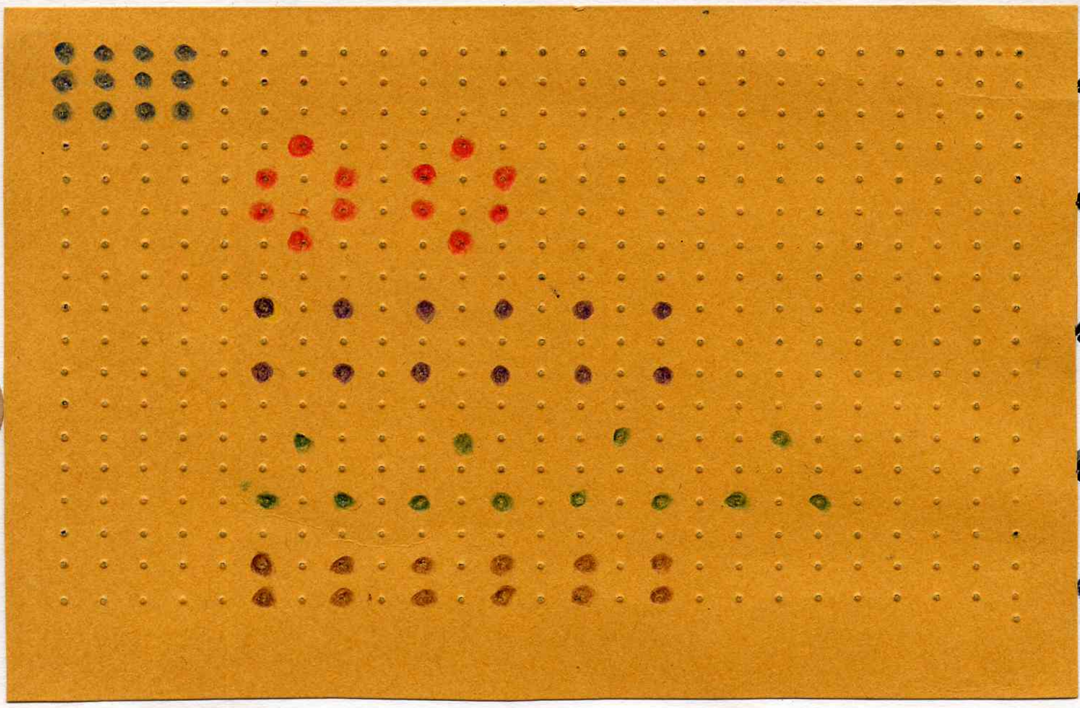
Der größte gemeinsame ~~Nenner oder~~ Faktor von 24 und 36 ist 12

Nach dieser Arbeit füllen die Kinder die vorgedruckten Formulare, auf denen alle Zahlen versehen sind, aus. ((siehe Beilage)

Neben dem Übertragen in die Faktorenliste können wir den Kindern auch die schriftliche Darstellung dessen zeigen, was wir auf dem Peggoty Board gelegt haben. (siehe Beilage)

Finding the H.C.F. (Highest Common Factor)

We take 12 and form as many different groups as we can.



We always try to start with two groups if possible.

When the child has done the operation on the peggoty-board it writes down the result, he has found.

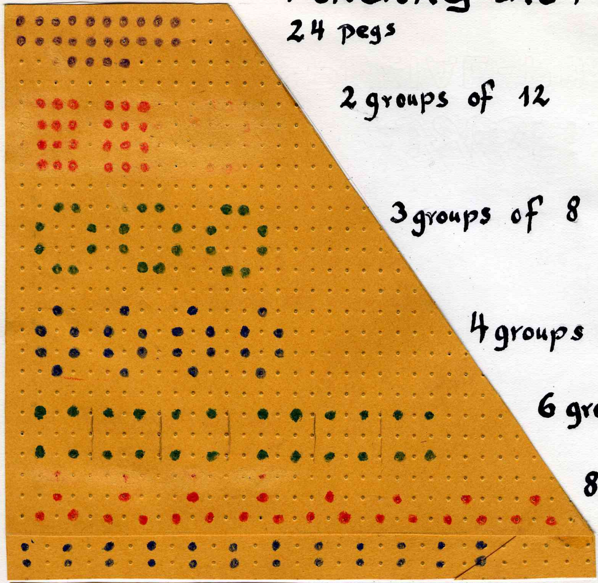
$$\begin{array}{r|l} & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 12 \\ 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}$$

Advanced writing down

$$12 = \left.\begin{array}{l} 6 \times 2 \\ 2 \times 6 \\ 3 \times 4 \\ 4 \times 3 \end{array}\right\}$$ These are the factors of the number 12

By comparison with another number the child can find out the H.C.F. (see next page)

Finding the H.C.F. of the Numbers 24 and 36



24 pegs

2 groups of 12

3 groups of 8

4 groups of 6

6 groups of 4

8 groups of 3

12 groups of 2

When the child has formed the groups he can write the results in the factoren-List. and into the List with the single results.

For finding only the prime factors we show the child how towrite the numbers down:

$$\begin{array}{r|l} & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 36 \\ 2 & 18 \\ 2 & 9 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$24 = 2^3 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

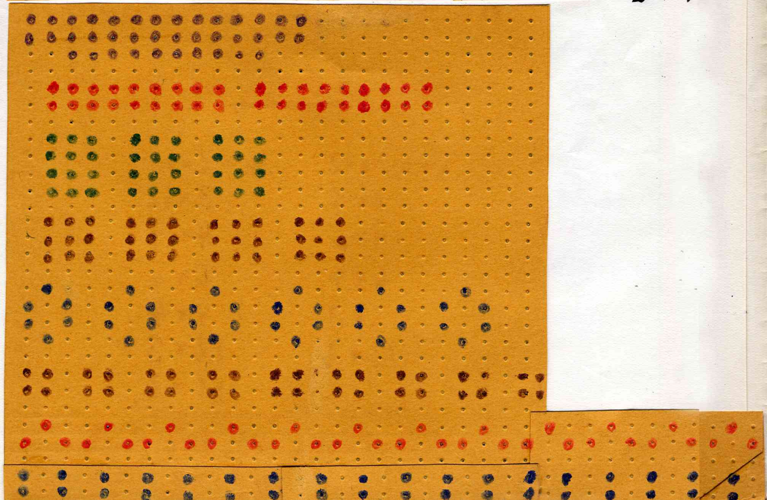
H.C.F. $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$

Rule for finding H.C.F.

Take only common prime factors with the Lowest power and multiply them.

The H.C.F. of 24 and 36

is 12



36 pegs

2 groups of 18

3 " " 12

4 " " 9

6 " " 6

9 " " 4

12 " " 3

18 " " 2

24 = 2×12	36 = 2×18
3×8	3×12
4×6	4×9
6×4	6×6
8×3	9×4
12×2	12×3
	18×2

These are the factors of 24 and 36

The Factors of Multiplication from 1 – 100

Berekening van veelvouden

Blad A

1 × 2 = 2	1 × 3 = 3	1 × 4 = 4	1 × 5 = 5	1 × 6 = 6	1 × 7 = 7	1 × 8 = 8	1 × 9 = 9	1 × 10 = 10
2 × 2 = 4	2 × 3 = 6	2 × 4 = 8	2 × 5 = 10	2 × 6 = 12	2 × 7 = 14	2 × 8 = 16	2 × 9 = 18	2 × 10 = 20
3 × 2 = 6	3 × 3 = 9	3 × 4 = 12	3 × 5 = 15	3 × 6 = 18	3 × 7 = 21	3 × 8 = 24	3 × 9 = 27	3 × 10 = 30
4 × 2 = 8	4 × 3 = 12	4 × 4 = 16	4 × 5 = 20	4 × 6 = 24	4 × 7 = 28	4 × 8 = 32	4 × 9 = 36	4 × 10 = 40
5 × 2 = 10	5 × 3 = 15	5 × 4 = 20	5 × 5 = 25	5 × 6 = 30	5 × 7 = 35	5 × 8 = 40	5 × 9 = 45	5 × 10 = 50
6 × 2 = 12	6 × 3 = 18	6 × 4 = 24	6 × 5 = 30	6 × 6 = 36	6 × 7 = 42	6 × 8 = 48		
7 × 2 = 14	7 × 3 = 21	7 × 4 = 28	7 × 5 = 35	7 × 6 = 42	7 × 7 = 49			
8 × 2 = 16	8 × 3 = 24	8 × 4 = 32	8 × 5 = 40	8 × 6 = 48				
9 × 2 = 18	9 × 3 = 27	9 × 4 = 36	9 × 5 = 45					
10 × 2 = 20	10 × 3 = 30	10 × 4 = 40	10 × 5 = 50					
11 × 2 = 22	11 × 3 = 33	11 × 4 = 44						
12 × 2 = 24	12 × 3 = 36	12 × 4 = 48						
13 × 2 = 26	13 × 3 = 39							
14 × 2 = 28	14 × 3 = 42							
15 × 2 = 30	15 × 3 = 45							
16 × 2 = 32	16 × 3 = 48							
17 × 2 = 34								
18 × 2 = 36								
19 × 2 = 38								
20 × 2 = 40								
21 × 2 = 42								
22 × 2 = 44								
23 × 2 = 46								
24 × 2 = 48								
25 × 2 = 50								

Montessori Leermiddel — No. 68 — Montessori Leermiddelenhuis A. Nienhuis

Berekening van veelvouden

26 × 2 = 52	17 × 3 = 51	13 × 4 = 52	11 × 5 = 55	9 × 6 = 54	8 × 7 = 56	7 × 8 = 56	6 × 9 = 54	6 × 10 = 60
27 × 2 = 54	18 × 3 = 54	14 × 4 = 56	12 × 5 = 60	10 × 6 = 60	9 × 7 = 63	8 × 8 = 64	7 × 9 = 63	7 × 10 = 70
28 × 2 = 56	19 × 3 = 57	15 × 4 = 60	13 × 5 = 65	11 × 6 = 66	10 × 7 = 70	9 × 8 = 72	8 × 9 = 72	8 × 10 = 80
29 × 2 = 58	20 × 3 = 60	16 × 4 = 64	14 × 5 = 70	12 × 6 = 72	11 × 7 = 77	10 × 8 = 80	9 × 9 = 81	9 × 10 = 90
30 × 2 = 60	21 × 3 = 63	17 × 4 = 68	15 × 5 = 75	13 × 6 = 78	12 × 7 = 84	11 × 8 = 88	10 × 9 = 90	10 × 10 = 100
31 × 2 = 62	22 × 3 = 66	18 × 4 = 72	16 × 5 = 80	14 × 6 = 84	13 × 7 = 91	12 × 8 = 96	11 × 9 = 99	
32 × 2 = 64	23 × 3 = 69	19 × 4 = 76	17 × 5 = 85	15 × 6 = 90	14 × 7 = 98			
33 × 2 = 66	24 × 3 = 72	20 × 4 = 80	18 × 5 = 90	16 × 6 = 96				
34 × 2 = 68	25 × 3 = 75	21 × 4 = 84	19 × 5 = 95					
35 × 2 = 70	26 × 3 = 78	22 × 4 = 88	20 × 5 = 100					
36 × 2 = 72	27 × 3 = 81	23 × 4 = 92						
37 × 2 = 74	28 × 3 = 84	24 × 4 = 96						
38 × 2 = 76	29 × 3 = 87	25 × 4 = 100						
39 × 2 = 78	30 × 3 = 90							
40 × 2 = 80	31 × 3 = 93							
41 × 2 = 82	32 × 3 = 96							
42 × 2 = 84	33 × 3 = 99							
43 × 2 = 86								
44 × 2 = 88								
45 × 2 = 90								
46 × 2 = 92								
47 × 2 = 94								
48 × 2 = 96								
49 × 2 = 98								
50 × 2 = 100								

The Factors of Multiplication from 1 – 100

Finding the common multiples on the FactorList by comparing two numbers is a preparation For Later abstract calculation.

The same is true when the children fill out the charts From 1-100 with the different time-tables.

The List for the Factors

Factorenlijst

1		26	2×13; 13×2;
2		27	
3		28	2×14; 4×7;
4	2×2;	29	
5		30	2×15; 3×10;
6	2×3; 3×2	31	
7		32	2×16; 4×8;
8	2×4; 4×2;	33	3×11; 11×
9	3×3;	34	2×17; 17×2
10	2×5; 5×2;	35	5×7; 7×5
11		36	2×18; 3×12;
12	2×6; 3×4; 4×3; 6×2;	37	
13		38	2×19; 19×2;
14	2×7; 7×2;	39	3×13; 13×3;
15	3×5; 5×3;	40	2×20; 4×10;
16	2×8; 4×4; 8×2;	41	
17		42	2×21; 3×14
18	2×9; 3×6; 6×3; 9×2;	43	
19		44	2×22; 4×11
20	2×10; 4×5; 5×4; 10×2;	45	3×15; 5×9;
21	3×7; 7×3;	46	2×23; 23×2
22	2×11; 11×2;	47	
23		48	2×24; 3×16
24	2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2,	49	7×7;
25	5×5;	50	2×25; 5×10

—MONTESSORI LEERMIDDEL— No. 70

Factorenlijst

1	
2	
3	
4	2×2;
5	
6	2×3; 3×2
7	
8	2×4; 4×2;
9	3×3;
10	2×5; 5×2;
11	
12	2×6; 3×4; 4×3; 6×2;
13	
14	2×7; 7×2;
15	3×5; 5×3;
16	2×8; 4×4; 8×2;
17	
18	2×9; 3×6; 6×3; 9×2;
19	
20	2×10; 4×5; 5×4; 10×2;
21	3×7; 7×3
22	2×11; 11×2;
23	
24	2×12, 3×8, 4×6, 6×4, 8×3, 12×2,
25	5×5;
26	2×13; 13×2;
27	
28	2×14; 4×7; 7×4; 14×2
29	
30	2×15; 3×10; 5×6; 6×5; 10×3; 15×2
31	
32	2×16; 4×8; 8×4; 16×2
33	3×11; 11×3;
34	2×17; 17×2;
35	5×7; 7×5;
36	2×18, 3×12, 4×9, 6×6, 9×4, 12×3, 18×2,
37	
38	2×19; 19×2;
39	3×13; 13×3;
40	2×20; 4×10; 5×8; 8×5; 10×4; 20×2;
41	
42	2×21; 3×14; 6×7; 7×6; 14×3; 21×2;
43	
44	2×22; 4×11; 11×4; 22×2
45	3×15; 5×9; 9×5; 15×3
46	2×23; 23×2;
47	
48	2×24; 3×16; 4×12; 6×8; 8×6; 12×4; 16×3; 24×2
49	7×7;
50	2×25; 5×10; 10×5; 25×2;

Factorenlijst

51	3 x 17 ; 17 x 3
52	2 x 26 ; ~~3 x 14~~ ; 4 x 13 ; 13 x 4 ; 26 x 2
53	
54	2 x 27 ; 3 x 18 ; 6 x 9 ; 9 x 6 ; 18 x 3 ; 27 x 2
55	5 x 11 ; 11 x 5 ;
56	2 x 28 ; 4 x 14 ; 7 x 8 ; 8 x 7 ; 28 x 2 ;
57	3 x 19 ; 19 x 3 ;
58	2 x 29 ; 29 x 2 ;
59	
60	2 x 30 ; 3 x 20 ; 4 x 15 ; 5 x 12 ; 6 x 10 ; 10 x 6 ; 12 x 5 ; 15 x 4 ; 20 x 3 ; 30 x 2 ;
61	
62	2 x 31 ; 31 x 2 ;
63	3 x 21 ; 7 x 9 ; 9 x 7 ; 21 x 3
64	2 x 32 ; 4 x 16 ; 8 x 8 ; 16 x 4 ; 32 x 2
65	5 x 13 ; 13 x 5 ;
66	2 x 33 ; 3 x 22 ; 6 x 11 ; 11 x 6 ; 22 x 3 ; 33 x 22
67	
68	2 x 34 ; 4 x 17 ; 17 x 4 ; 34 x 2
69	3 x 23 ; 23 x 3 ;
70	2 x 35 ; 5 x 14 ; 7 x 10 ; 10 x 7 ; 14 x 5 ; 35 x 2 ;
71	
72	2 x 36 ; 3 x 24 ; 4 x 18 ; 6 x 12 ; 8 x 9 ; 9 x 8 ; 12 x 6 ; 18 x 4 ; 24 x 3 ; 36 x 2
73	
74	2 x 37 ; 37 x 2
75	3 x 25 ; 5 x 15 ; 15 x 5 ; 25 x 3
76	2 x 38 ; 4 x 19 ; 19 x 4 ; 38 x 2
77	7 x 11 ; 11 x 7 ;
78	2 x 39 ; 3 x 16 ; 6 x 13 ; 13 x 6 ; 16 x 3 ; 39 x 2
79	
80	2 x 40 ; 4 x 20 ; 5 x 14 ; 8 x 10 ; 10 x 8 ; 14 x 5 ; 20 x 4 ; 40 x 2
81	3 x 27 ; 9 x 9 ; 27 x 3
82	2 x 41 ; 41 x 2 ;
83	
84	2 x 42 ; 3 x 28 ; 4 x 21 ; 6 x 12 ; 12 x 6 ; 21 x 4 ; 28 x 3 ; 42 x 2
85	5 x 17 ; 17 x 5 ;
86	2 x 43 ; 43 x 2 ;
87	3 x 29 ; 29 x 3 ;
88	2 x 44 ; 4 x 22 ; 8 x 11 ; 11 x 8 ; 22 x 4 ; 44 x 2
89	
90	2 x 45 ; 3 x 30 ; 5 x 18 ; 6 x 15 ; 9 x 10 ; 10 x 9 ; 15 x 6 ; 18 x 5 ; 30 x 3 ; 45 x 2 ;
91	7 x 13 ; 13 x 7 ;
92	2 x 46 ; 4 x 23 ; 23 x 4 ; 46 x 2
93	3 x 31 ; 31 x 3 ;
94	2 x 47 ; 47 x 2 ;
95	5 x 19 ; 19 x 5 ;
96	2 x 48 ; 3 x 32 ; 4 x 24 ; 6 x 16 ; 8 x 12 ; 12 x 8 ; 16 x 6 ; 24 x 4 ; 32 x 3 ; 48 x 2 ;
97	
98	2 x 49 ; 7 x 14 ; 14 x 7 ; 49 x 2 ;
99	3 x 33 ; 9 x 11 ; 11 x 9 ; 33 x 3 ;
100	2 x 50 ; 4 x 25 ; 5 x 20 ; 10 x 10 ; 20 x 5 ; 25 x 4 ; 50 x 2

Factorenlijst written down in simplified way

1		26	2×13,
2		27	
3		28	
4	2^2	29	
5		30	2×15, 3×10, 5×6,
6	2×3,	31	
7		32	2×16, 4×8,
8	4×2,	33	3×11,
9	3^2	34	2×17,
10	2×5,	35	5×7,
11		36	2×18, 3×12, 4×9, 6^2,
12	2×6, 3×4	37	
13		38	2×19,
14	2×7,	39	3×13,
15	3×5,	40	2×20, 4×10, 5×8,
16	2×8, 4^2	41	
17		42	2×21, 3×14, 6×7;
18	2×9, 3×6	43	
19		44	2×22, 4×11;
20	2×10, 4×5	45	3×15, 5×9;
21	3×7,	46	2×23;
22	2×11,	47	
23		48	2×24, 3×16, 4×12, 6×8,
24	2×12, 3×8, 4×6,	49	7^2
25	5^2	50	2×25, 5×10;

Factorenlijst written down in a simplified w

51	3×17,
52	2×26, 4×13,
53	
54	2×27, 3×18, 6×9
55	5×11,
56	2×28, 4×14, 7×8;
57	3×19;
58	2×29;
59	
60	2×30, 3×20, 4×15, 5×12;
61	
62	2×31;
63	3×21, 7×9;
64	2×32, 4×16, 8^2;
65	5×13;
66	2×33, 3×22, 6×11,
67	
68	2×34, 4×17
69	3×23,
70	2×35, 5×14, 7×10,
71	
72	2×36, 3×24, 4×18, 6×12, 9×8,
73	
74	2×37;
75	3×25; 5×15
76	2×38, 4×19;
77	7×11
78	2×39, 3×26, 6×13
79	
80	2×40, 4×20, 5×16, 8×10,
81	3×27, 9^2
82	2×41,
83	
84	2×42, 3×28, 4×21, 6×14;
85	5×17;
86	2×43;
87	3×29;
88	2×44, 4×22, 8×11,
89	
90	2×45, 3×30, 5×18, 6×15, 9×10;
91	7×13;
92	2×46, 4×23;
93	3×31;
94	2×47;
95	5×19;
96	2×48, 3×32, 4×24, 6×16, 8×12;
97	
98	2×49, 7×14
99	3×33, 9×11
100	2×50, 4×25, 5×20, 10^2;

15. Vortrag am 18. 11. 57   gehalten von Madame Joosten

Darbietung über das Finden des L.C. M. mit großen Zahlen. auf dem Peggoty Board.

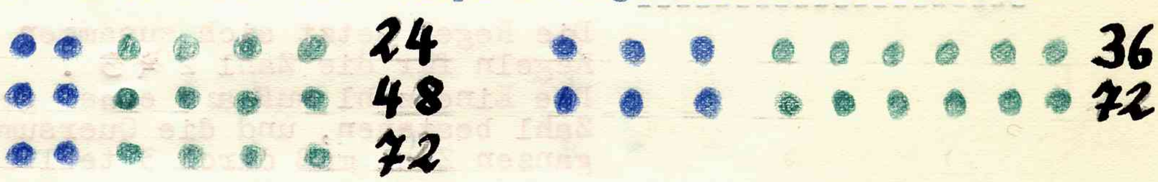
Darbietung der Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen von 1 - 10 in großen Zahlen.

Vereinfachung der langen Division.

Multiplikation dargestellt in geometrischer Form.

Darbietung über das Finden des L.C.M. mit großen Zahlen auf dem Peggoty Board.

Bisher haben wir nur die Zahlen unter 10 auf ihre niedrigste Multiplikationszahl untersucht. Das gleiche kann nun auf dem Peggoty Board vorgenommen werden, wenn wir für die Zahlen über 90 die blaue Farbe für die Zehner vorbehalten und für die Einer die grüne Farbe benutzen. Außer den Steckern brauchen wir noch die Zahlen des Dezimalsystems oder das Kind kann auch die Zahlen auf einen Streifen Papier jeweils schreiben.
Um den niedrigsten gemeinsamen Nenner (L.C.M.) zu finden von 24 und 36 würde das Beispiel folgendermaßen aussehen:



Es ist ratsam, Aufgaben auf kleinen Karten vorzubereiten. Man muß dabei darauf achten, daß der niedrigste gemeinsame Nenner auf dem Peggoty Board erreicht werden kann.

Darbietung der Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen von 1 - 10 in großen Zahlen.

Das Bestehen des Dezimalsystems macht es uns möglich, Regeln über die Teilbarkeit der Zahlen von 1 - 9 aufzustellen.

Regel für die Zahl 2

10 ist teilbar durch 2
100 " " " 2
1000" " " 2 } Schon Hundert + Tausend sind natürlich eine Wiederholung der Zehn.
alle weiteren Zahlen sind eine Wiederholung.

Wenn ich also wissen will, ob irgendeine beliebige Zahl durch 2 teilbar ist, brauche ich nur die Einerzahlen zu berücksichtigen.

Regel für die Zahl 5

10 ist teilbar durch 5
100 " " " 5
1000" " " 5

Nur die Einerzahlen brauchen berücksichtigt zu werden.

Regel für die Zahl 4

100 ist teilbar durch 4
Alle weiteren Zahleneinheiten haben als kleinste Größe das Hunderterquadrat.

Bei der Teilbarkeit der 4 brauchen deshalb nur die Einer- und Zehnerzahlen berücksichtigt zu werden.

Regel für die Zahl 3

10 ist teilbar durch 3 + 1
100 " " " 3 + 1
1000" " " 3 + 1

Diese Tatsache läßt uns zu dem Schluß kommen, daß wir die Restzahlen aus den einzelnen Einheiten der Zehner, Hunderter Tausender usw. sehr einfach addieren können, indem wir die Quersumme der gegebenen Zahl errechnen, inklusive der Einer. Ist die errechnete Zahl durch 3 teilbar, so ist die ganze Zahl teilbar durch 3.

8 4 0 6 7 9

9	+ 9
7 x 10	+ 7
6 x 100	+ 6
4 x 10 000	+ 4
8 x 100 000	+ 8

840 679 ist teilbar durch 3 + 34
Die Restzahl wird also 1 sein.

Zur Feststellung der Teilbarkeit einer Zahl durch 3 muß die Quersumme der gegebenen Zahl errechnet werden. Ist diese durch 3 teilbar, so ist die ganze Zahl durch 3 teilbar.

Regel für die Zahl 6

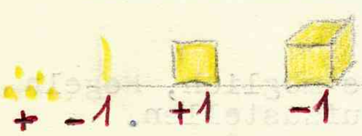
Die Regel setzt sich zusammen aus den Regeln für die Zahl 2 x 3.
Die Einerzahl muß aus einer geraden Zahl bestehen, und die Quersumme der ganzen Zahl muß durch 3 teilbar sein.

Regel für die Zahl 9

Dieselbe Regel wie für die Zahl 3 wird angewandt.
Die Quersumme zeigt die Teilbarkeit an.

Regel für die Zahl 11

10 ist teilbar durch 11 - 1
100 " " " 11 + 1
1000" " " 11 - 1
usw.



Daraus folgt, daß wir die Quersumme der Einer, Hunderter, Zehntausender usw. zusammenzählen müssen und ~~von~~ die Quersumme, die sich aus den Zehnern, Tausendern usw. ergibt, davon abziehen müssen.

Beispiel:

2 3 4 8 5

5	+ 5
8 x 10	- 8
4 x 100	+ 4
3 x 1000	- 3
2 x 10 000	+ 2

23485 ist teilbar durch 11 + (5 + 4 + 2) - (8 + 3)
11 - 11 = 0

In diesem Fall ist die Zahl durch 11 teilbar.

Die Summe der geraden Zahlen wird von der Summe der ungeraden Zahlen abgezogen.

$\overset{11}{2\,3\,4\,8\,5}$ 11 $\underset{11}{}$

11 - 11 = 0

Darstellung am Rechenrahmen

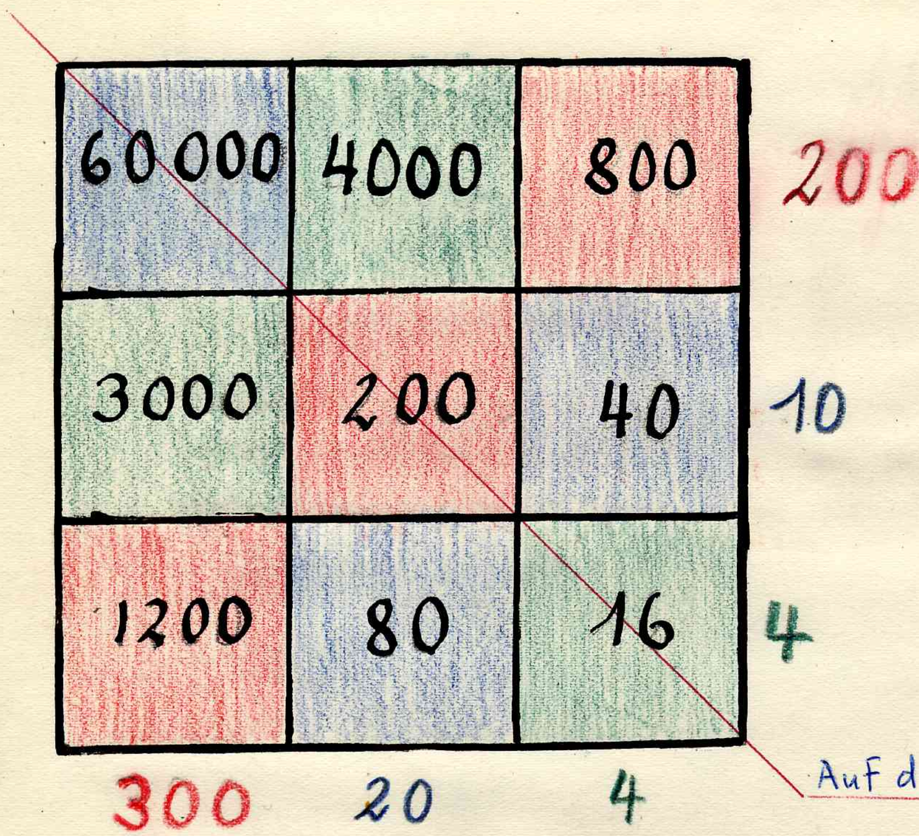
Die Pluszahlen werden in die Mitte geschoben. Die Minuszahlen bleiben nahe dem Rand.

Fortsetzung 15. Vortrag

Vereinfachte Form dder langen Division

29 / 6547 \ 228

Multiplikation dargestellt in geometrischer Form



Auf der Diagonalen stehen die Quadratzahlen wenn eine Zahl mit sich selber malgenommen wird.
In diesem Fall entstehen nur Rechtecke.

Einer mal Einer = Einer
Einer mal Zehner= Zehner
Zehner mal Einer= Zehner
Zehner mal Zehner = Hunderter
Einer mal Hunderter= Hunderter
Hunderter mal Einer = Hunderter
Zehner mal Hunderter= Tausender
Hunderter mal Zehner= Tausender
Hunderter mal Hunderter = Zehntausender

Die Einer , die Hunderter , und die Zehntausender bilden die Quadrate. Die Zehner und die Tausender füllen das große Qadrat auf beiden Seiten aus.

Finding the Lowest Common Multiple

Rule: All prime-factors common and uncommon with the highest power are multiplied.

L.C.M. of 50 + 60

$$\begin{array}{r|l} & 50 \\ 2 & 25 \\ 5 & 5 \\ 5 & 1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r|l} & 60 \\ 2 & 30 \\ 2 & 15 \\ 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{array}\right\} \text{Finding Prime-factors}$$

$50 = 2 \times 5^2$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

L.C.M. $= 2^2 \times 5^2 \times 3 = 4 \times 25 \times 3 = 300$

L.C.M. of 8 + 36

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 36 \\ 2 & 18 \\ 2 & 9 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$8 = 2^3$

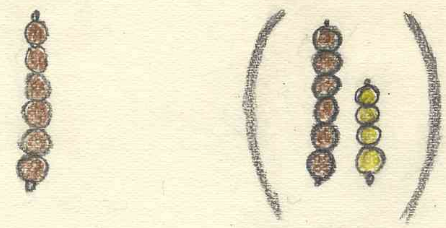
$36 = 2^2 \times 3^2$

L.C.M. $= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

Fortsetzung 16. Vortrag

Kleine Spiele halten das Interesse wach!

Beispiel: Ich habe zwei Perlenstäbchen in meiner Hand. Eines davon ist die 6. Zusammen ergeben sie 10. Was für eine Zahl hat das zweite Perlenstäbchen in meiner Hand?



Darstellung verschiedener Aufgaben mit dem Perlenmaterial

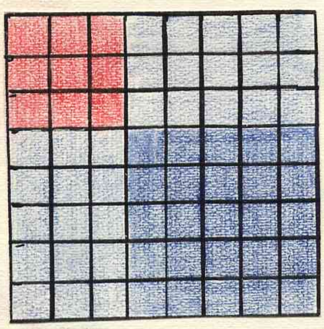
Das Addieren von Quadratzahlen mit 100 als Grenze

$$(2+3)^2 = (2+3) \times (2+3) = 5^2$$

$$2\times2 + 3\times2 + 2\times3 + 3\times3$$

$$4 + 6 + 6 + 9$$

2 Quadrate + 2 Rechtecke

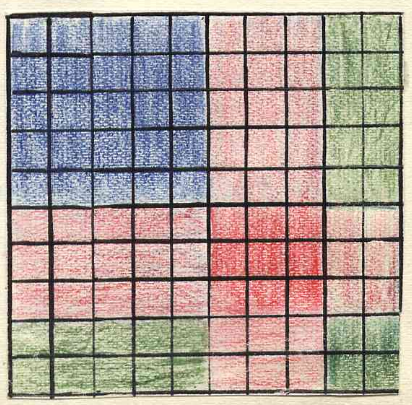


$$(3+5)^2 = (3+5) \times (3+5) = 8^2$$

$$3\times3 + 3\times5 + 5\times3 + 5\times5$$

$$9 + 15 + 15 + 25$$

2 Quadrate + 2 Rechtecke



$$(5+3+2)^2 = (5+3+2) \times (5+3+2) = 10^2$$

$$5\times5 + 5\times3 + 5\times2 + 3\times5 + 3\times3 + 3\times2$$

$$25 + 15 + 10 + 15 + 9 + 6$$

$$+ 2\times5 + 2\times3 + 2\times2$$

$$+ 10 + 6 + 4$$

Hilfe durch das Angebot der richtigen Dinge.

In dem Alter über 6 Jahre sind die Kinder mehr an Physiologie als an Botanik interessiert. Nicht die Namen sind jetzt mehr interessant, sondern wie eine Sache funktioniert.

In der Schule sollten die Dinge geübt werden, die die Kinder auch im praktischen Leben brauchen. Was muß beispielsweise alles bedacht werden, wenn man eine Reise macht oder wenn man Camping gehen will usw.

Wir können das Interesse in der Schule auf bestimmte Dinge lenken, sodaß die Kinder auf einem Spaziergang oder bei einer Zoobesichtigung schon mit einem ganz bestimmten Aspekt, oder sogar mehreren Aspekten, die Dinge, die sie sehen, betrachten.

Wir haben in der Schule die Aufgabe, den Kindern die richtige geistige Nahrung zu geben.

Die Verbindung zur größeren Gemeinschaft soll so bald wie möglich hergestellt werden. Wenn eine Gruppe beispielsweise Camping gehen will und der Campingplatz soll auf einer Wiede, die einem Bauern gehört, angelegt werden, so wäre es eine gute Gelegenheit, daß die Kinder ihre Hilfe beim Bauern als Entgelt anböten.

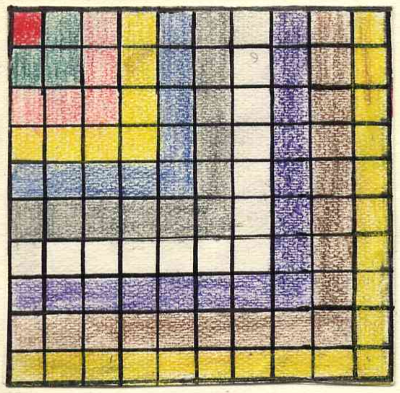
In einer Montessorischule wird sehr viel sogenannte "Sientific Handwork" ausgeführt. Anlage eines Flußbettes usw. Während das Kind arbeitet, erwirbt es Kenntnisse.

Um das Problem des vorgeschriebenen Wissens zu lösen, wird eine Liste mit all den Dingen aufgehängt, die die Kinder in einer bestimmten Zeit lernen müssen. Die Kinder wissen dann, daß sie diese Dinge lernen müssen, wenn sie Zeit haben wollen, all die andern sehr viel interessanteren Dinge auszuführen.

Die Natur ist so freigebig. Laßt doch die Kinder daran Anteil haben.

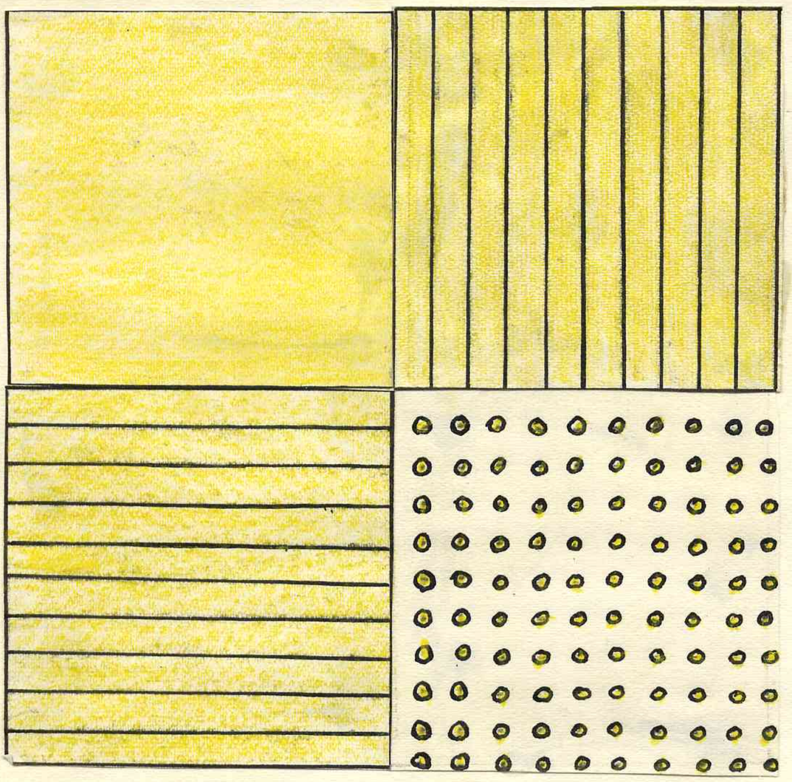
2. Teil gehalten von Madame Joosten

Über die Beziehung der Quadrate untereinander und Anwendung des Dezimalsystems bei der Quadratberechnung



Die aufeinanderfolgenden Quadrate von 1 – 10

1^2	wird	in	2^2	verwandelt durch	$2 \times 1 + 1$
2^2	"	"	3^2	" "	$2 \times 2 + 1$
3^2	"	"	4^2	" "	$2 \times 3 + 1$
4^2	"	"	5^2	" "	$2 \times 4 + 1$
5^2	"	"	6^2	" "	$2 \times 5 + 1$
6^2	"	"	7^2	" "	$2 \times 6 + 1$
7^2	"	"	8^2	" "	$2 \times 7 + 1$
8^2	"	"	9^2	" "	$2 \times 8 + 1$
9^2	"	"	10^2	" "	$2 \times 9 + 1$



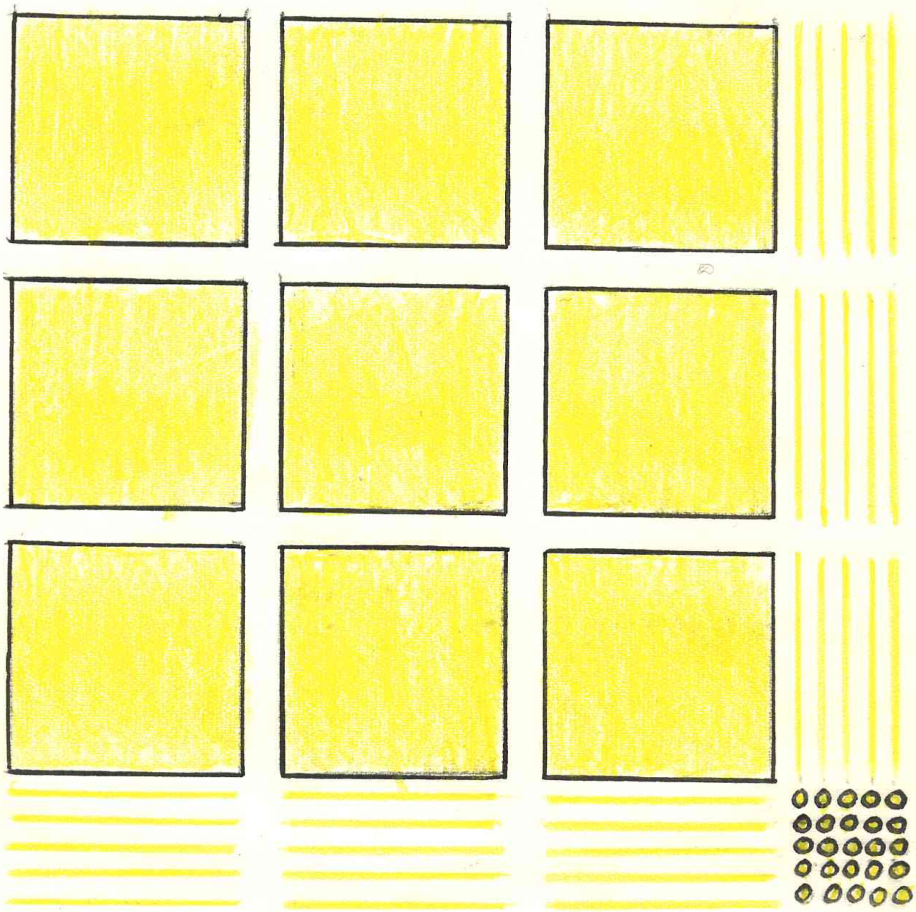
Mit Hilfe des Dezimal = systems Legen wir die Quadrate von 10 – 20

$11^2 = 10^2 + 1 + (2 \times 10)$
$12^2 = 11^2 + 2 \times 1 + 1 + (2 \times 10)$
$13^2 = 12^2 + 2 \times 2 + 1 + (2 \times 10)$
$14^2 = 13^2 + 2 \times 3 + 1 + (2 \times 10)$
$15^2 = 14^2 + 2 \times 4 + 1 + (2 \times 10)$
$16^2 = 15^2 + 2 \times 5 + 1 + (2 \times 10)$
$17^2 = 16^2 + 2 \times 6 + 1 + (2 \times 10)$
$18^2 = 17^2 + 2 \times 7 + 1 + (2 \times 10)$
$19^2 = 18^2 + 2 \times 8 + 1 + (2 \times 10)$
$20^2 = 19^2 + 2 \times 9 + 1 + (2 \times 10)$

Die Einerperlen und Zehnerstäbe des Quadra = tes von 20 Können in Hunderterquadrate ein = getauscht werden. $20^2 = 400$

Fortsetzung 17. Vortrag 2. Teil

Anwendung des Dezimalsystems
Quadrat von 35



mit Perlenmaterial

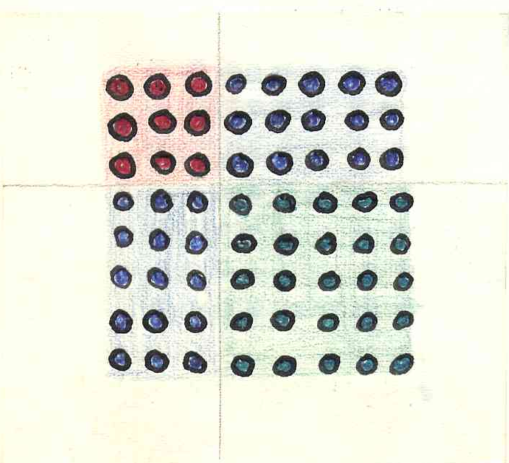
$(30+5)^2$

$$\begin{array}{r} 30+5 \times \\ 30+5 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30^2 = 900 \\ 5^2 = 25 \\ 2\times(5\times30) = 300 \\ \hline 1225 \end{array}$$

mit

Stecker steinen



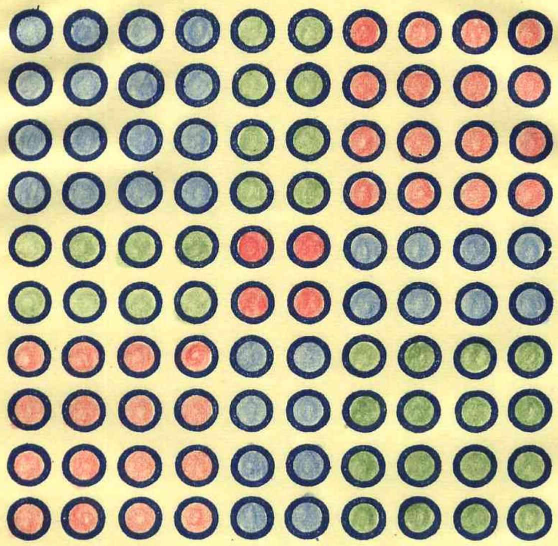
35^2

$900+25+2\times(5\times30)$

$= 11^2$

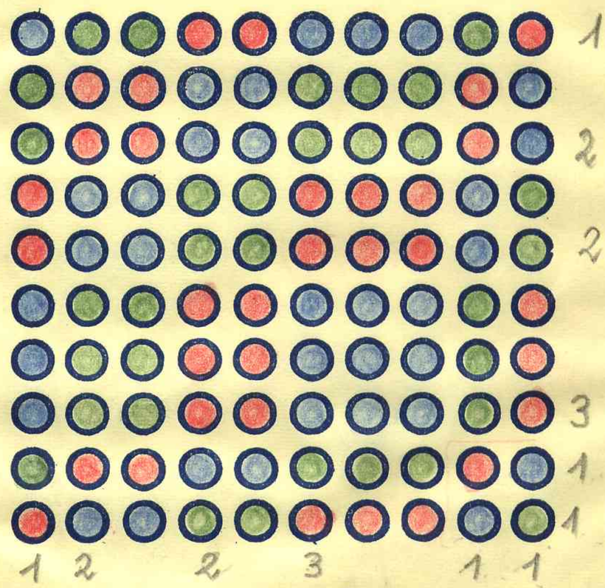
Bildung der Quadratzahlen

nach der Arbeit auf dem Steckerbrett



424^2

Artikel 241



$1 2 2\ 3 1 1^2$

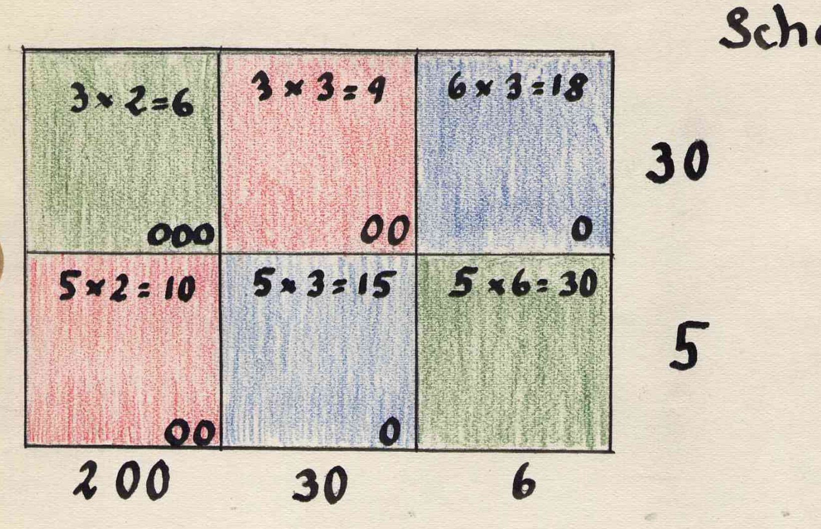
Artikel 241

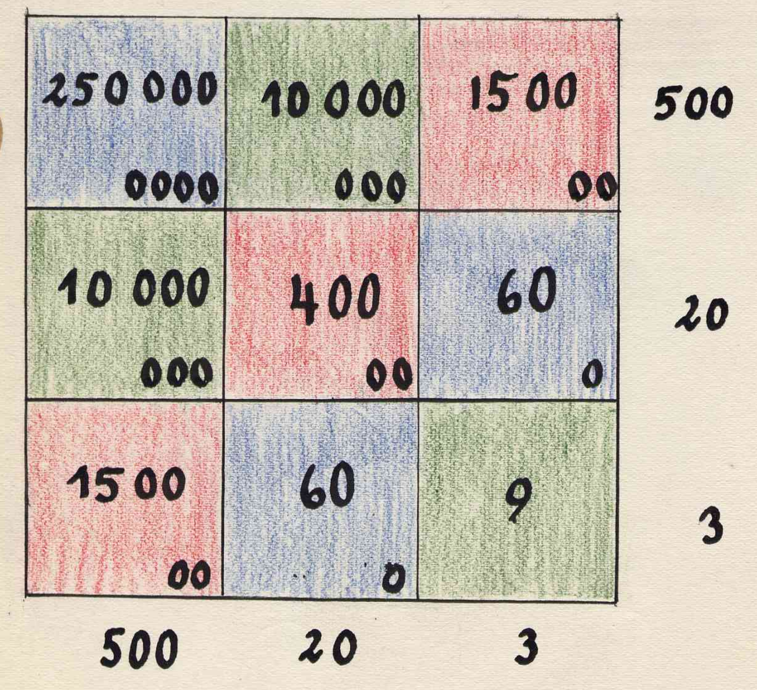
18. Vortrag am 25. 11. 57 gehalten von Mario Montessori

Über die Abstraktion der algebraischen Formel

Darstellung der Multiplikation:

auf dem Schachbrett

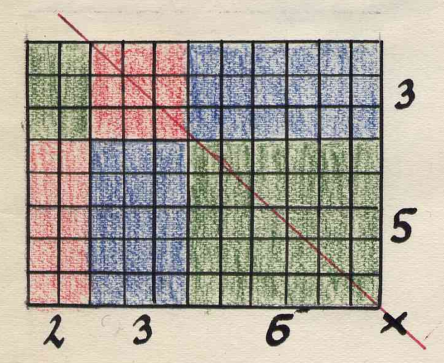


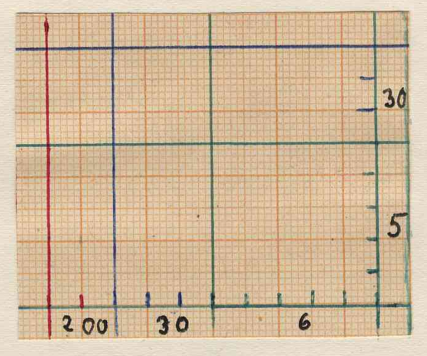


Bei der Multiplikation mit ungleichen Zahlen bestimmen die Rechtecke oder Quadrate, die auf der Diagonalen stehen, die Form der übrigen Rechtecke.

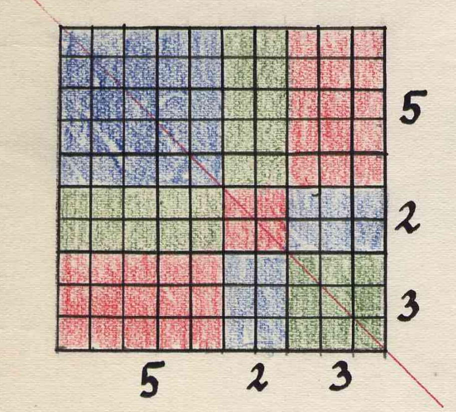
mit den Steckern

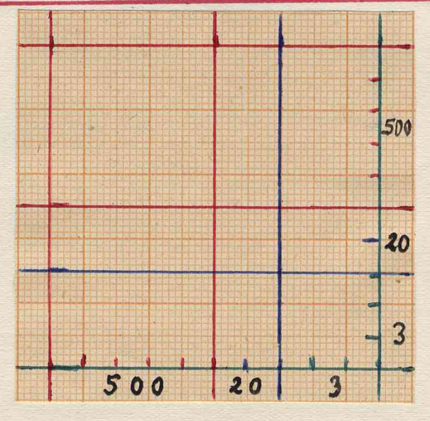
Zeichnung auf Millimeterpapier



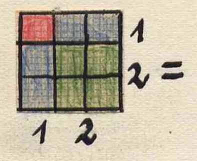


Bei der Multiplikation mit Quadratzahlen sindesdie Seiten der Quadrate, die die Form der Rechtecke bestimmen





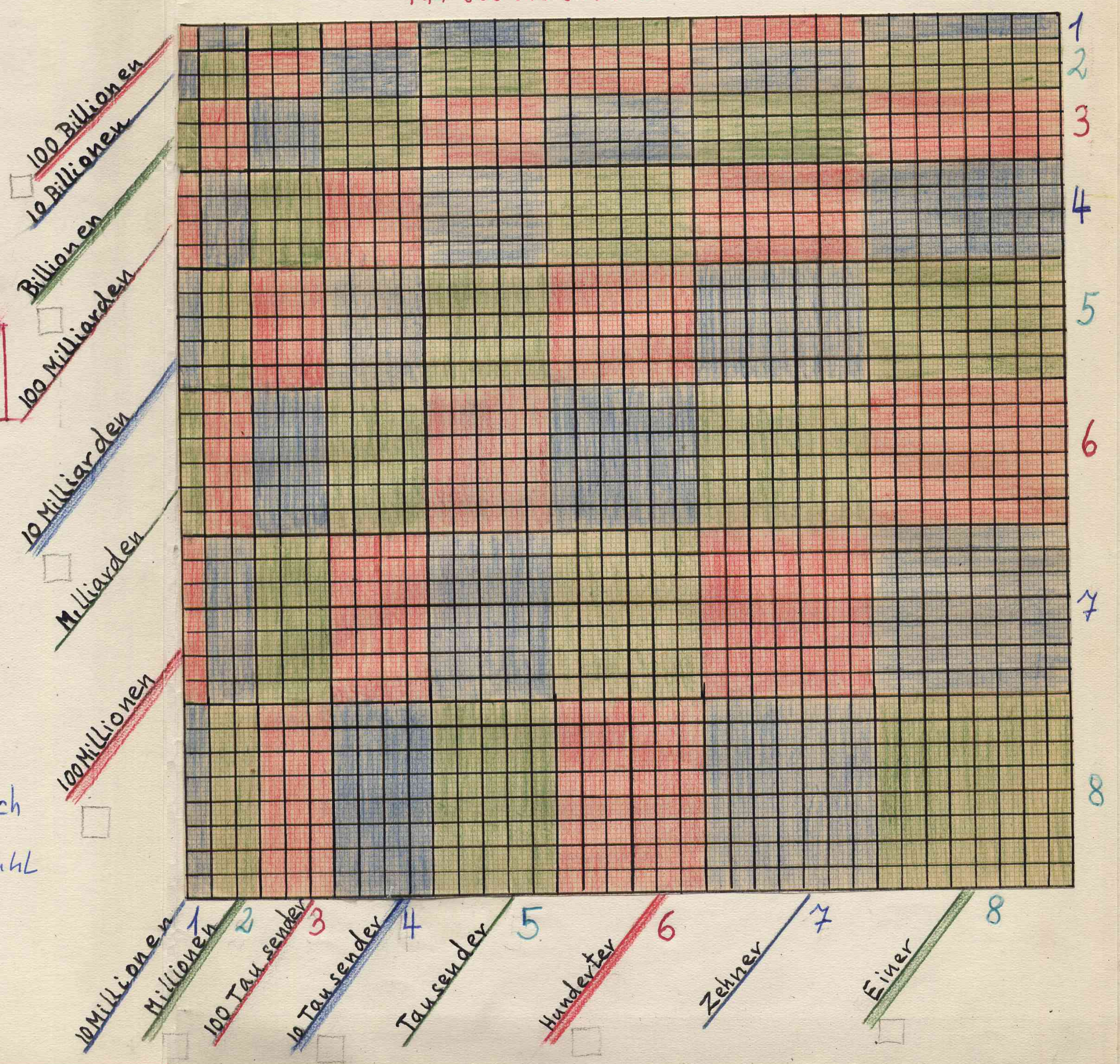
Die Anzahl derFelder, die bei der Multiplikation entstehen, richtet sich nach der Anzahl der einzelnen Zahlen des Multiplikanten + des Multiplikators.
Die ~~Quadr~~Anzahl der Zahlen des Multiplikanten malgenommen mit der Anzahl derZahlen des Multiplikators ergibt die Anzahl der entstehenden Felder.
In unserm Beispiel ist das: 3×2 = 6 Felder ; 3×3 = 9 Felder



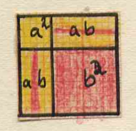
= Das Quadrat von 12 Billionen enthält=

4 Billionen + 2x 20 Billionen + 100 Billionen

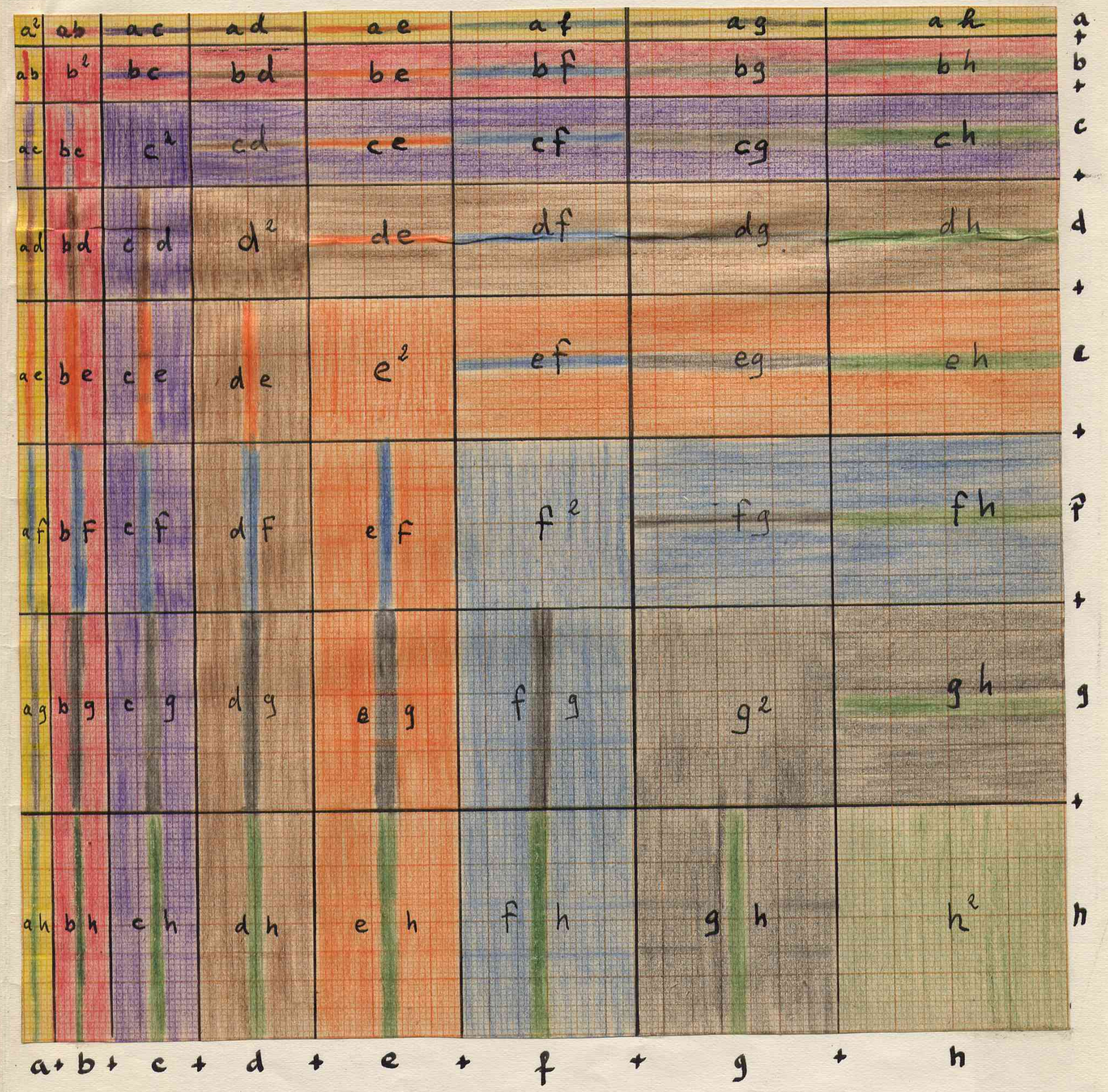
4 000 000 000 000
40 000 000 000 000
100 000 000 000 000
144 000 000 000 000



Die algebraische Formel heißt:



$= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Das Verhalten der Zahleneinheiten im Quadrat

Z	Z^2		Z	Z^2
1	1		10	100
2	4		20	400
3	9		30	900
4	16		40	1600
5	25		50	2500
6	36		60	3600
7	49		70	4900
8	64		80	6400
9	81		90	8100

Die Quadratzahl der Einer besteht aus Einern + Zehnern

Die Quadratzahl der Zehner besteht aus Hundertern + Tausendern

Die Quadratzahl der Hunderter besteht aus Zehntausendern + Hunderttausendern.

$12\ 345\ 678^2 =$

$(12\ 345\ 678 \times 12\ 345\ 678)^2 =$

$8^2 + 2\times(8\times7) + 2\times(8\times6) + 2\times(8\times5) + 2\times(8\times4) + 2\times(8\times3) + 2\times(8\times2) + 2\times(8\times1) +$
$7^2 + 2\times(7\times6) + 2\times(7\times5) + 2\times(7\times4) + 2\times(7\times3) + 2\times(7\times2) + 2\times(7\times1) +$
$6^2 + 2\times(6\times5) + 2\times(6\times4) + 2\times(6\times3) + 2\times(6\times2) + 2\times(6\times1) +$
$5^2 + 2\times(5\times4) + 2\times(5\times3) + 2\times(5\times2) + 2\times(5\times1) +$
$4^2 + 2\times(4\times3) + 2\times(4\times2) + 2\times(4\times1) +$
$3^2 + 2\times(3\times2) + 2\times(3\times1) +$
$2^2 + 2\times(2\times1) +$
1^2

- = Einer - = Zehner - = Hunderter -,0, 00
-- = Tausend -- = 10 Tausend -- = 100 Tausend ,000
-- = Million -- = 10 Millionen -- = 100 Millionen ,000.000
-- = Milliarde -- = 10 Milliarden -- = 100 Milliarden ,000.000.000
-- = Billion -- = 10 Billionen -- = 100 Billionen 000.000.000.000

$(a+b+c+d+e+f+g)^2 =$

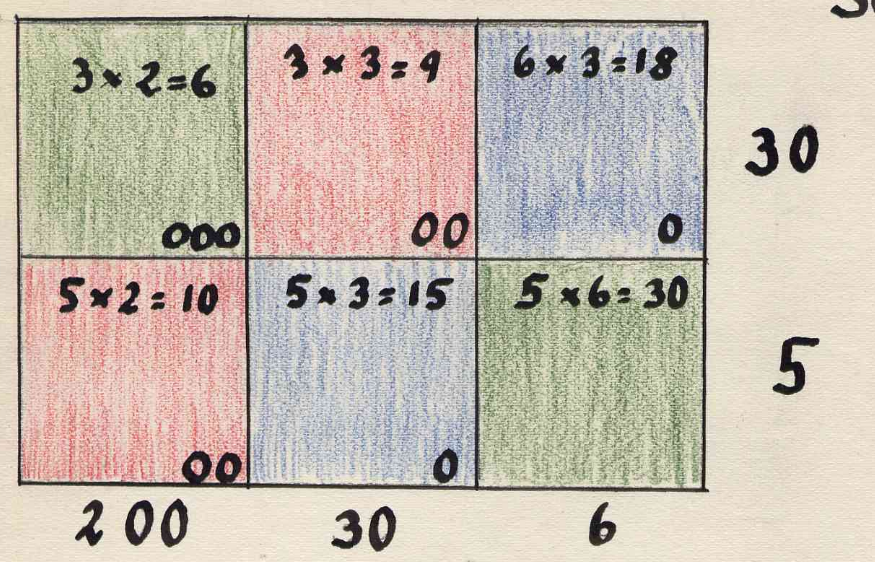
$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2af + 2ag + 2ah +$
$b^2 + 2bc + 2bd + 2be + 2bf + 2bg + 2bh +$
$c^2 + 2cd + 2ce + 2cf + 2cg + 2ch +$
$d^2 + 2de + 2df + 2dg + 2dh +$
$e^2 + 2ef + 2eg + 2eh +$
$f^2 + 2fg + 2fh +$
$g^2 + 2gh +$
h^2

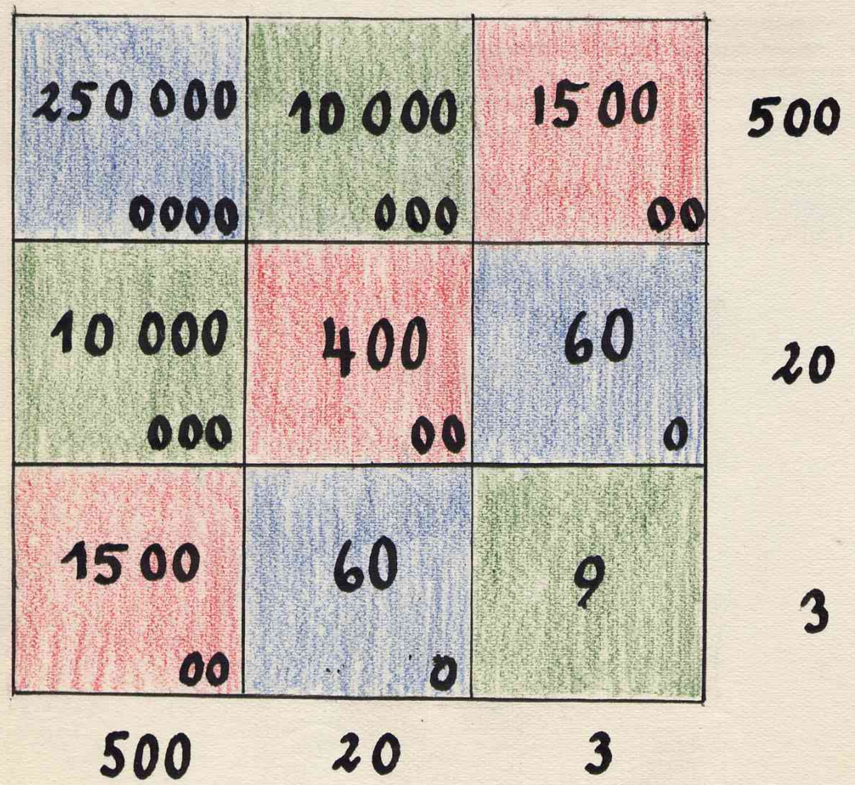
18. Vortrag am 25. 11. 57 gehalten von Mario Montessori

Über die Abstraktion der algebraischen Formel

Darstellung der Multiplikation:

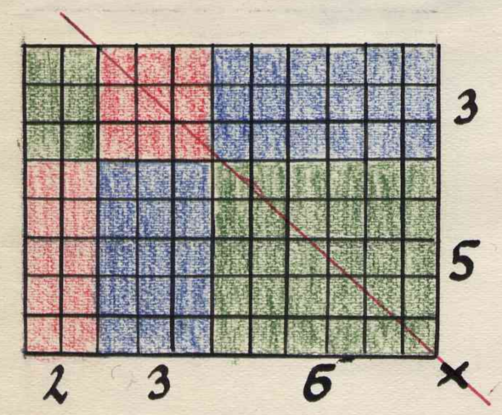
auf dem Schachbrett



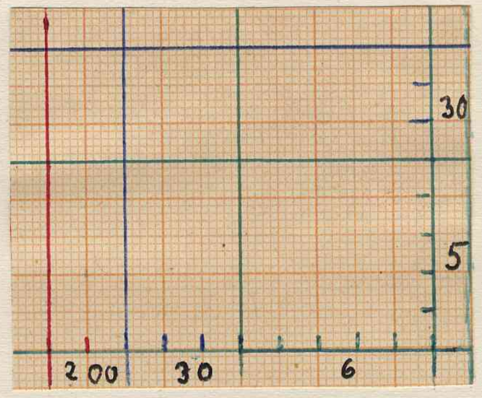


Bei der Multiplikation mit ungleichen Zahlen bestimmen die Rechtecke oder Quadrate, die auf der Diagonalen stehen, die Form der übrigen Rechtecke.

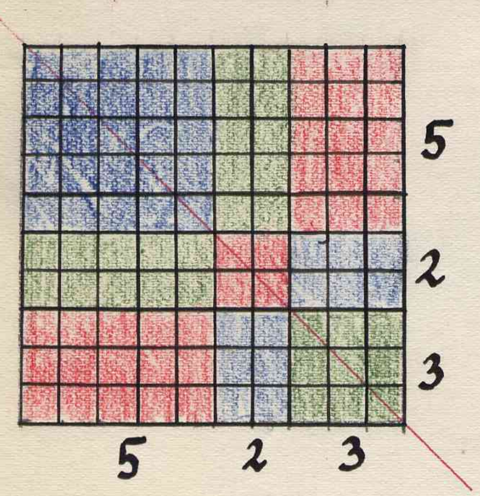
mit den Steckern

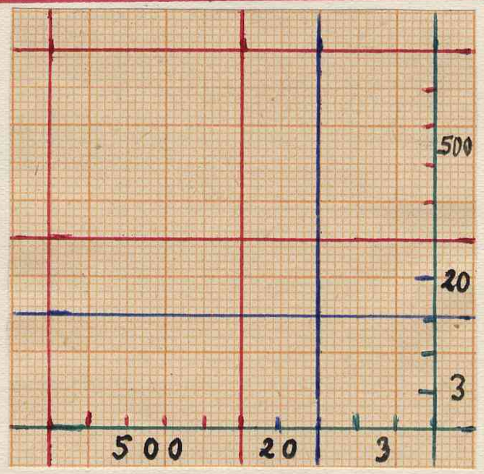


Zeichnung auf Millimeterpapier

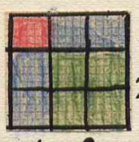


Bei der Multiplikation mit Quadratzahlen sind es die Seiten der Quadrate, die die Form der Rechtecke bestimmen





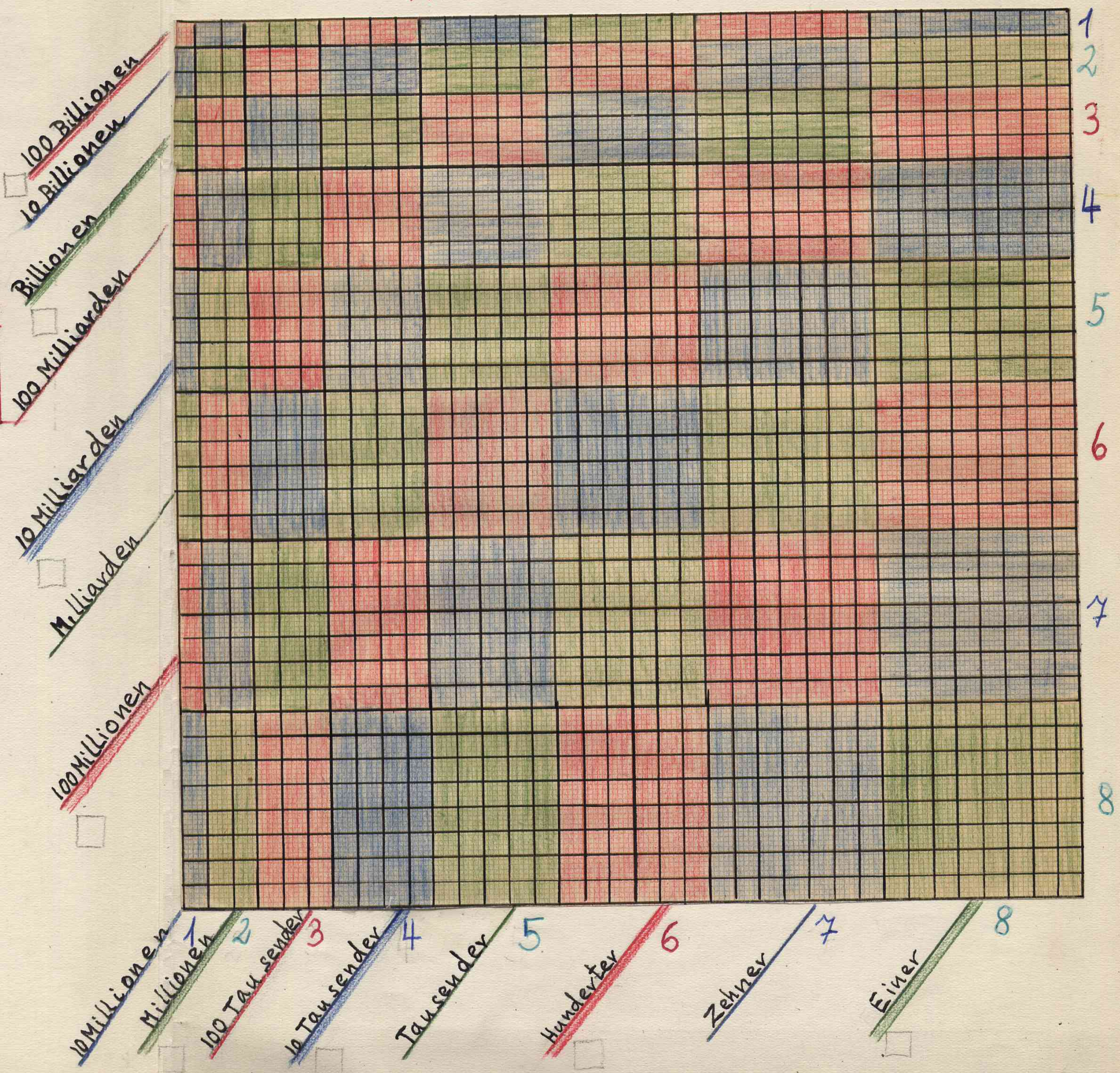
Die Anzahl der Felder, die bei der Multiplikation entstehen, richtet sich nach der Anzahl der einzelnen Zahlen des Multiplikanten + des Multiplikators.
Die ~~Quad~~Anzahl der Zahlen des Multiplikanten mal genommen mit der Anzahl der Zahlen des Multiplikators ergibt die Anzahl der entstehenden Felder.
In unserm Beispiel ist das: 3 × 2 = 6 Felder ; 3 × 3 = 9 Felder



12^2 = Das Quadrat von 12 Billionen enthält =

4 Billionen + 2 x 20 Billionen + 100 Billionen

$$\begin{array}{r} 4\,000\,000\,000\,000 \\ 40\,000\,000\,000\,000 \\ 100\,000\,000\,000\,000 \\ \hline 144\,000\,000\,000\,000 \end{array}$$



$$12\,345\,678^2 =$$

$$(12\,345\,678 \times 12\,345\,678)^2 =$$

$8^2 + 2\times(8\times7) + 2\times(8\times6) + 2\times(8\times5) + 2\times(8\times4) + 2\times(8\times3) + 2\times(8\times2) + 2\times(8\times1) +$

$7^2 + 2\times(7\times6) + 2\times(7\times5) + 2\times(7\times4) + 2\times(7\times3) + 2\times(7\times2) + 2\times(7\times1) +$

$6^2 + 2\times(6\times5) + 2\times(6\times4) + 2\times(6\times3) + 2\times(6\times2) + 2\times(6\times1) +$

$5^2 + 2\times(5\times4) + 2\times(5\times3) + 2\times(5\times2) + 2\times(5\times1) +$

$4^2 + 2\times(4\times3) + 2\times(4\times2) + 2\times(4\times1) +$

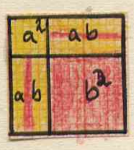
$3^2 + 2\times(3\times2) + 2\times(3\times1) +$

$2^2 + 2\times(2\times1) +$

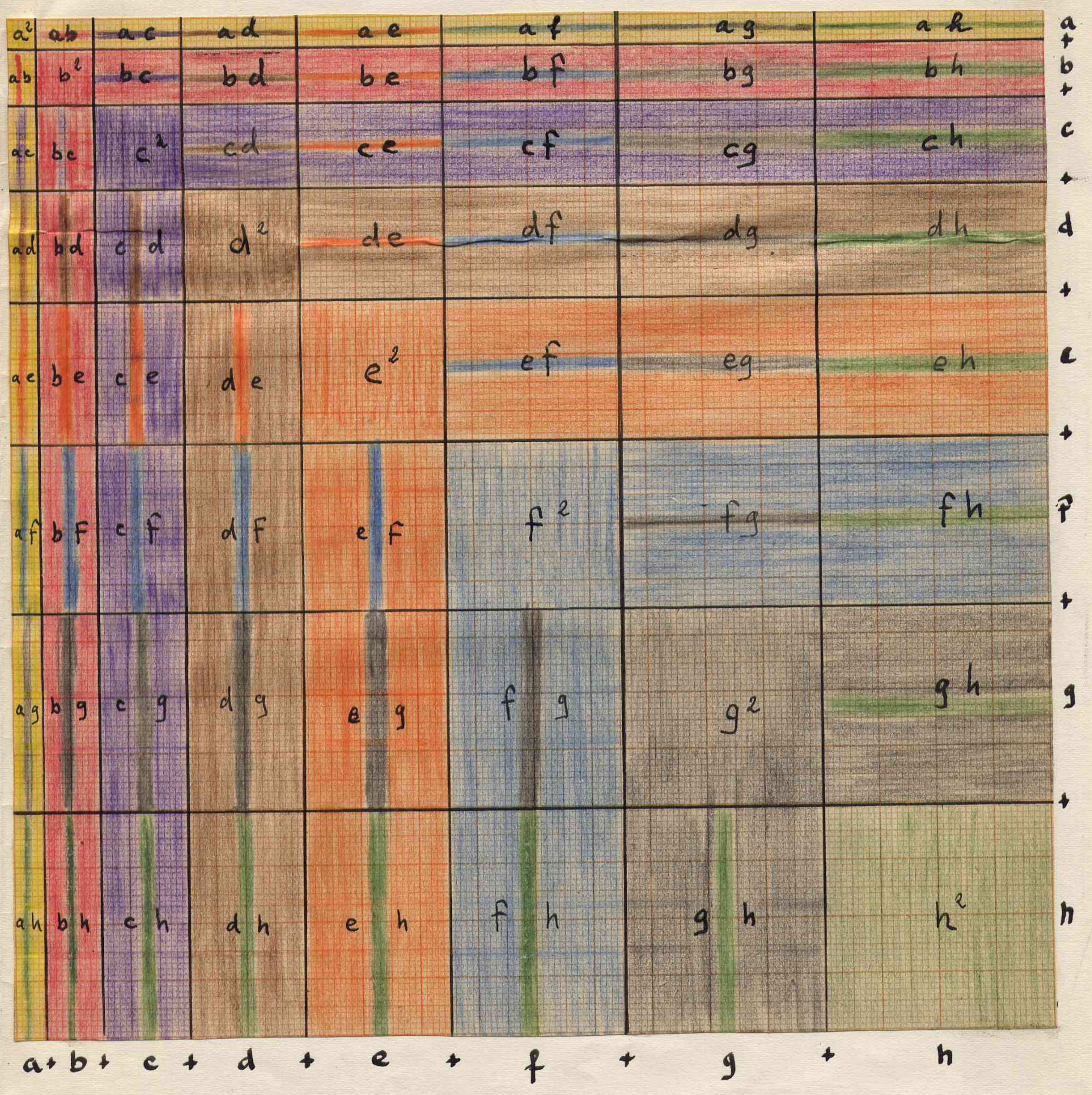
1^2

- = Einer	- = Zehner	- = Hunderter	-,0,00
- - = Tausend	- - = 10 Tausend	- - = 100 Tausend	,000
- - = Million	- - = 10 Millionen	- - = 100 Millionen	,000.000
= = = Milliarde	= = = 10 Milliarden	= = = 100 Milliarden	,000.000.000
= = = Billion	= = = 10 Billionen	= = = 100 Billionen	,000.000.000.000

Die algebraische Formel heißt:



$$= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b+c+d+e+f+g)^2 =$$

$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2af + 2ag + 2ah +$
$b^2 + 2bc + 2bd + 2be + 2bf + 2bg + 2bh +$
$c^2 + 2cd + 2ce + 2cf + 2cg + 2ch +$
$d^2 + 2de + 2df + 2dg + 2dh +$
$e^2 + 2ef + 2eg + 2eh +$
$f^2 + 2fg + 2fh +$
$g^2 + 2gh +$
h^2

Das Verhalten der Zahleneinheiten im Quadrat

Z	Z^2		Z	Z^2
1	1		10	100
2	4		20	400
3	9		30	900
4	16		40	1600
5	25		50	2500
6	36		60	3600
7	49		70	4900
8	64		80	6400
9	81		90	8100

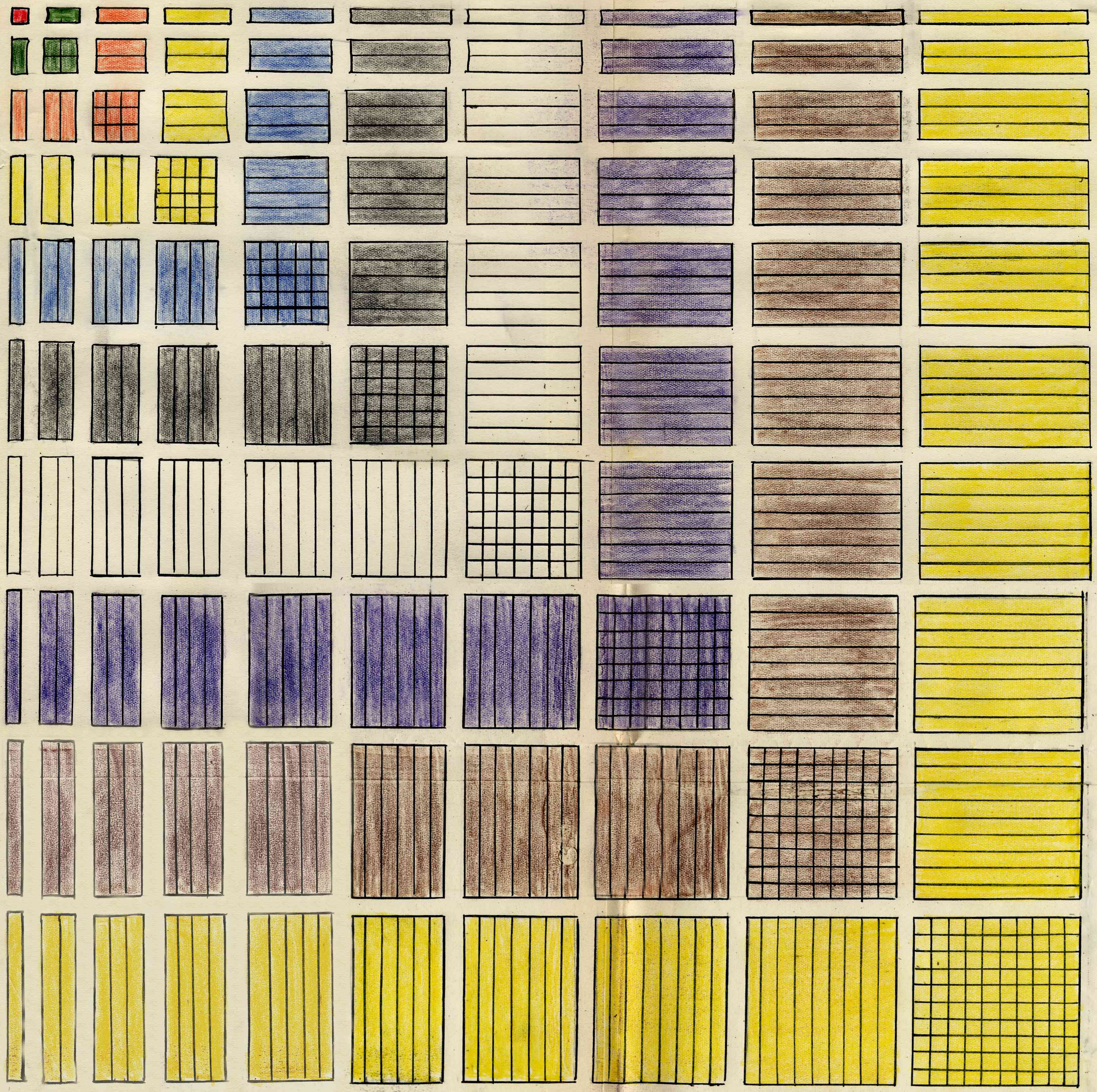
Die Quadratzahl der Einer besteht aus Einern + Zehnern

Die Quadratzahl der Zehner besteht aus Hundertern + Tausendern

Die Quadratzahl der Hunderter besteht aus Zehntausendern + Hunderttausendern.

The Successive Numbers from 1–10 Laid out in a Square

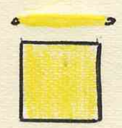
Each square number will form a cube with the numbers of its two sides.



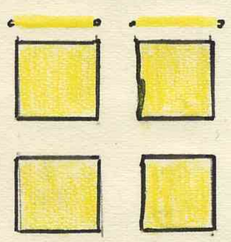
19. Vortrag gehalten am 27. 11. 57 von Mario Montessori

Finding the Square-root

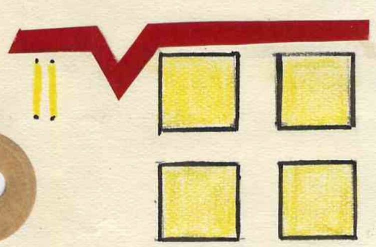
with the Golden Bead Material



We form the square of 10. That means we have to take a hundred square.



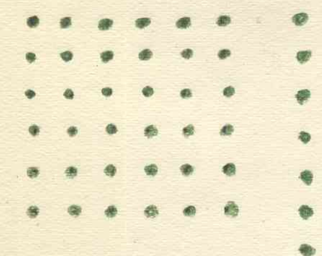
We form the square of 2x 10. That means we have to take 4 x 100



The root of the square we find on one side
The root is the originator of the square.

on the Peggoty Board

we start with the square of one.



We get a square of 6 and 7 are remaining.

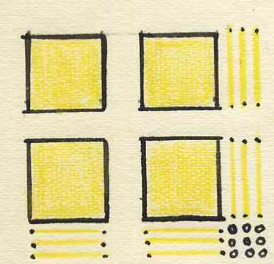
Take a handful of green pegs. They are 43.
Now we want to find the square-root of 43.

$$\sqrt{43}$$

$$6\sqrt{43} \quad +7$$

Square of 23 we want to find

$$23\sqrt{} \quad \text{or} \ (2t + 3u)^2$$



$$2t+3u\sqrt{4h + 2\times(2t\times 3) + 9u}$$

$$23\sqrt{529}$$

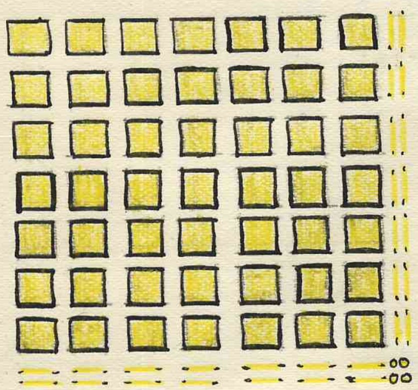
The root is made of 2 tens and 3 units

Finding the Square-root of a Big Number

52|36

with the Golden Bead Material

When we want to find the root of a numberwith 4 digets we have to seperate it. Units and tens go together Hundreds and Thousands go together.



We count 52 hundreds and form the biggest square we can.

We have used up 49. The remaining 3 Hundreds are changed into tens.

$33t : (2 \times 7) = 2$ R5t

The 33 tens are distributed equally on both sides of the Square 28 can be distributed in this way. With the units we fill the square.

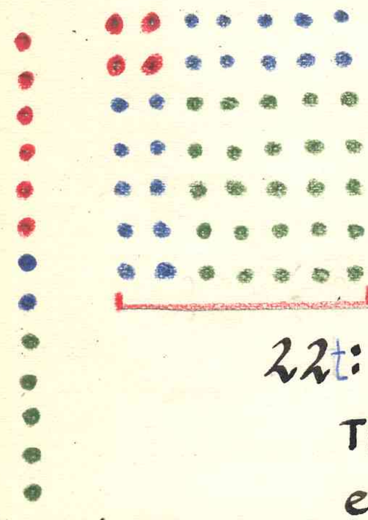
```
       ______+52
72 √ 52 | 36
     49
     --
      3 3
      2 8
     ----
        56
         4
        --
        52
```

The root is 72 + the remainder of 52

6|25

on the Peggoty Board

```
25 √ 6,25
     4
     --
     22
     20
     --
      25
      00
```



The Root

The given number

$22t : (2 \times 2t) = 5$ R2t

The tens are distributed equally on both sides of the square formed by the hundreds.

Rule:

If one wants to find the root of a number with four digets one has to devide the number in pairs beginning from the right.
One starts with forming the biggest square possible of the first pair or single number starting from the left.
The remainder is changed into the next lower value and added to the number of the lower value and then is distributed equally on both sides of the square.
The remaining units fill the square.
The root is to be found on the bottom-side of the square.

27a

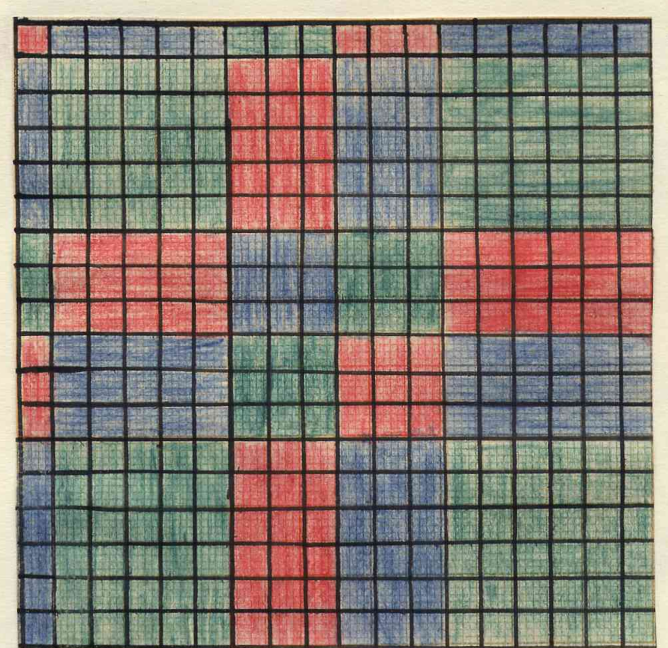
Finding The Squareroot Of Very Big Numbers And Of Numbers Which Contain Zeros.

HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{2,35,21,64,13}$ = 15336 R 23517

```
 1
 135
 125
  1021
   909
   11264
    9189
    207513
    183996
    R 23517
```

```
25
5x
125
303
3x
909
3063
3x
9189
30666
6x
183996
```

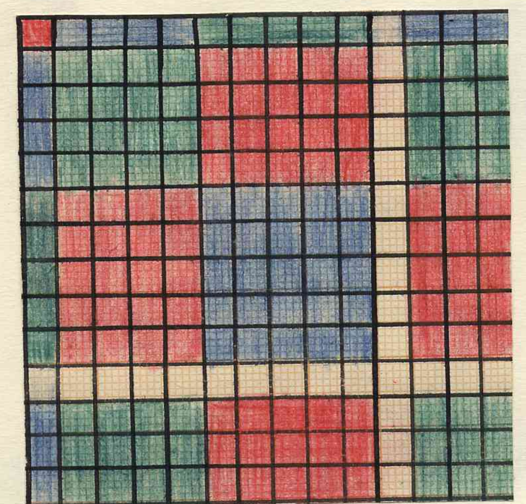


HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{2,10,36,52,63}$ = 14503 R 28254

```
 1
 110
  96
  1436
  1426
   115263
    87009
   R 28254
```

```
24
4x
96
285
5x
1425
2900
0x
2900
29003
3x
87009
```

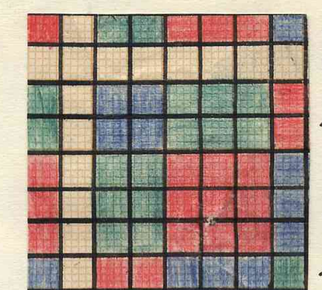


HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{1,04,67,62,51}$ = 10231 R 2890

```
 1
 00,467
   404
    6362
    6129
     23351
     20461
     R 2890
```

```
20
0x
20
202
2x
404
2043
3x
6129
20461
1x
20461
```

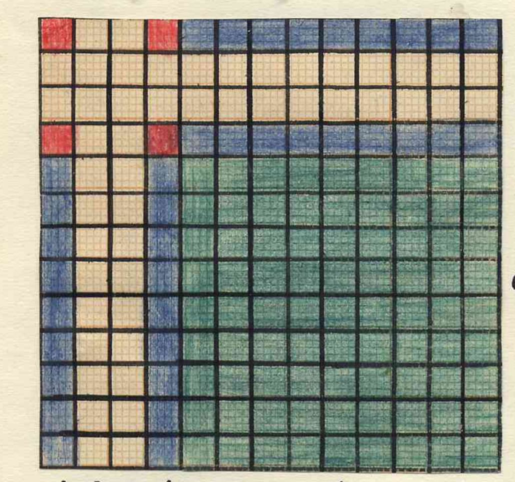


HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{1,00,39,16,16}$ = 10019 R 11255

```
 1
 0003916
    2001
    191516
    180261
    R 11255
```

```
20
0x
200
0x
2001
1x
2001
20029
9x
180261
```



How we work out the Sqareroot of a big number

If one has to find the squareroot of a number one has to devide the number into pairs from the right to the left.
The first square is formed with the first pair or single number from the left. we subtract the used up amount from this number. The remainder is added to the next two numbers which we now bring down.
In our first example the result was 1. This we write on the line beside the squarenumber.
We double this square- number as seen in our example.
Now we can calculate how big we can make the next square considering that the millions have to form the new square and the tT have to fill in the space between the square of HM and the new square of the M.
In our example we find that we can form the square of M with the root of 5. The tM fill in the spaces.
The remainder is 1 tM. We bring down the next two numbers the HT and the tT.
The squareroot we found until now is 15. we double this number and we find out that the square we can form with the tT has a root of 3. The spaces of the HMsquare and the Msquare have to be filled in with the M and the HT.
Our remainder is 1M 1HT 2tT. We bring down to it the T and the H. We double the squareroot we found up to now. It is 306. We find that we can form the square of the H with the root of 3. Now the spaces of the Msquare the tTsquare and the Hsquare have to be filled in with HT, tT and T.
We double the Squareroot we found up to now. It is 3066. We find that we can form the Square of the U. with the root of 6. The spaces of the Msquare, the tTsquare, the Hsquare and the Usquare.have to be filled in with TT, T, H, and t.
The remainder in our example is 2tT 3T 5H 1t 7U
The squareroot we found is 15336.

In the following examples we find, that we cannot form the successive Squares. So we have to skip these sqares and with it we skip the spaces which would otherwise have been filled in with the appropriate Values. We have to fill the Spaces with zeros. and change the numbers into the corresponding values for the following squares and their spaces.

27a

Finding The Squareroo

HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{2,35,21,64,13}$ = 1 5 3 3 6 R 2 3 5 1 7

1

1 3.5
1 2 5

1 0 2.1
9 0 9

1 1 2 6.4
9 1 8 9

2 0 7 5 1.3
1 8 3 9 9 6

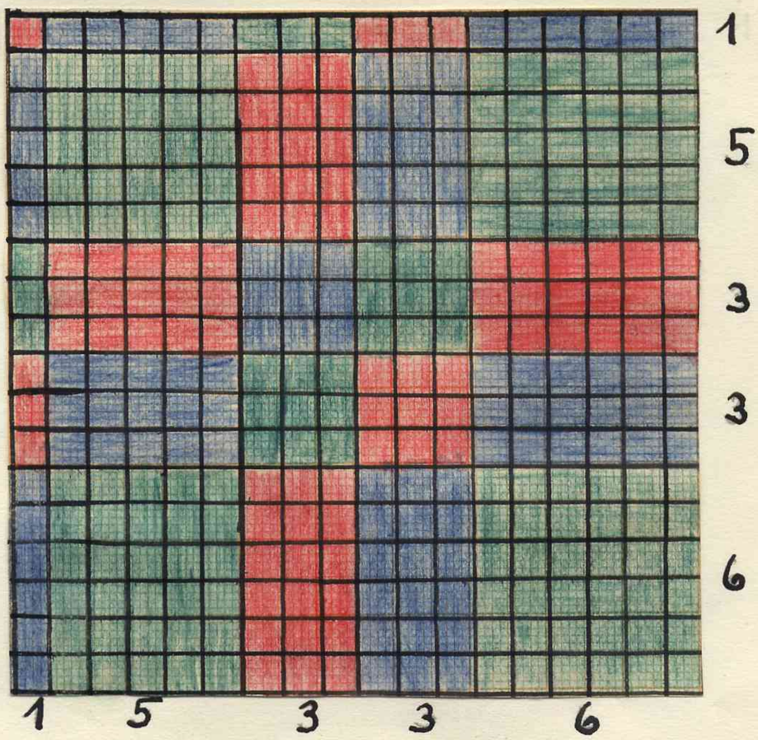
R 2 3 5 1 7

2 5
5×
1 2 5

3 0 3
3×
9 0 9

3 0 6 3
3×
9 1 8 9

3 0 6 6 6
6×
1 8 3 9 9 6



How we work out the Sqareroot of a big number

If one has to find the squareroot of a number one has to devide the number into pairs from the right to the left.
The first square is formed with the first pair or single number from the left. We subtract the used up amount from this number. The remainder is added to the next two numbers which we now bring down.
In our first example the result was 1. This we write on the line beside the squarenumber.
We double this square- number as seen in our example. Now we can calculate how big we can make the next square considering that the millions have to form the new square and the tT have to fill in the space between the square of HM and the new square of the M.
In our example we find that we can form the square of M with the root of 5. The tM fill in the spaces. The remainder is 1 tM. We bring down the next two numbers the HT and the tT.
The squareroot we found until now is 15. We double this number and we find out that the square we can form with the tT has a root of 3. The spaces of the HMsquare and the Msquare have to be filled in with the M and the HT.
Our remainder is 1M 1HT 2tT. We bring down to it the T and the H. We double the squareroot we found up to now. It is 306. We find that we can form the square of the H with the root of 3. Now the spaces of the Msquare the tTsquare and the Hsquare have to be filled in with HT, tT and T.
We double the Squareroot we found up to now. It is 3066. We find that we can form the Square of the U. with the root of 6. The spaces of the Msquare, the tTsquare, the Hsquare and the Usquare.have to be filled in with TT, T, H, and t.
The remainder in our example is 2tT 3T 5H 1t 7U
The squareroot we found is 15336.

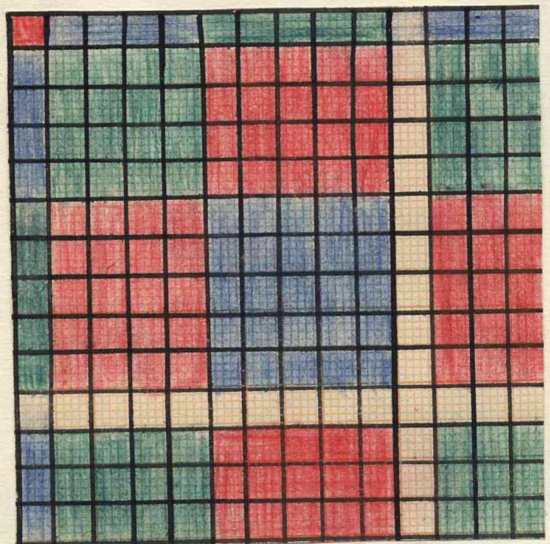
In the following examples we find, that we cannot form the successive Squares. So we have to skip these squares and with it we skip the spaces which would otherwise have been filled in with the appropriate Values. We have to fill the Spaces with zeros. and change the numbers into the corresponding values for the following squares and their spaces.

t Of Very Big Numbers And

HM ZMM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{2,10,36,52,63}$ 14503 R 28254

1	24
1 1,0	4x
96	96
14 3,6	285
14 26	5x
11 5,2 6,3	1425
8 7 0 09	2900
R 28254	0x
	2900
	29003
	3x
	87009



Of Numbers Which Contain

HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{1{,}04{,}67{,}62{,}51}$ 1 0 2 3 1 R 2890

1

0 0,4 6,7

4 04

63 6,2

61 29

2 3 3 5 1

2 0 4 6 1

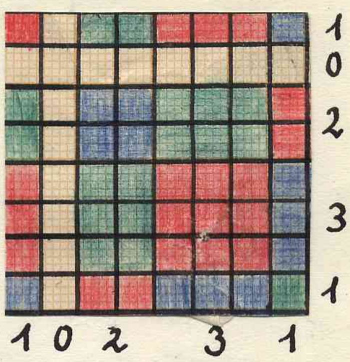
R 2 8 9 0

20
0×
20

202
2×
404

2043
3×
6129

20461
1×
20461



Zeros.

HM ZM M HT ZT T H Z E

$\sqrt{1,0\;0,3\;9,1\;6,1\;6}$ = 1 0 0 1 9 R 1 1 2 5 5

1

0 0 0 3,9 1,6

2 0 0 1

1 9 1 5 1 6

1 8 0 2 6 1

R 1 1 2 5 5

2 0

0 ×

2 0 0

0 ×

2 0 0 1

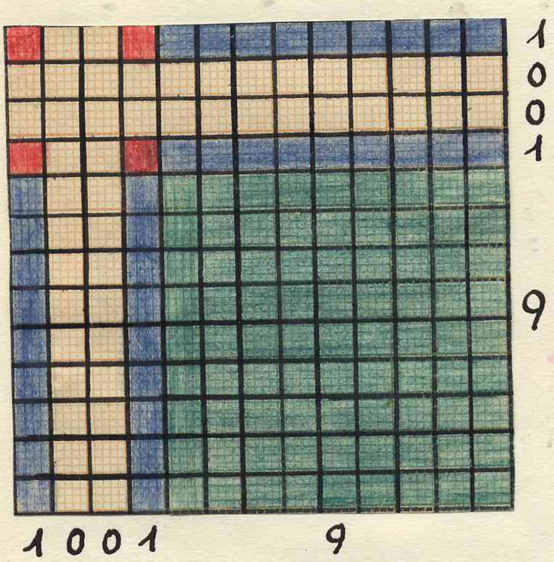
1 ×

2 0 0 1

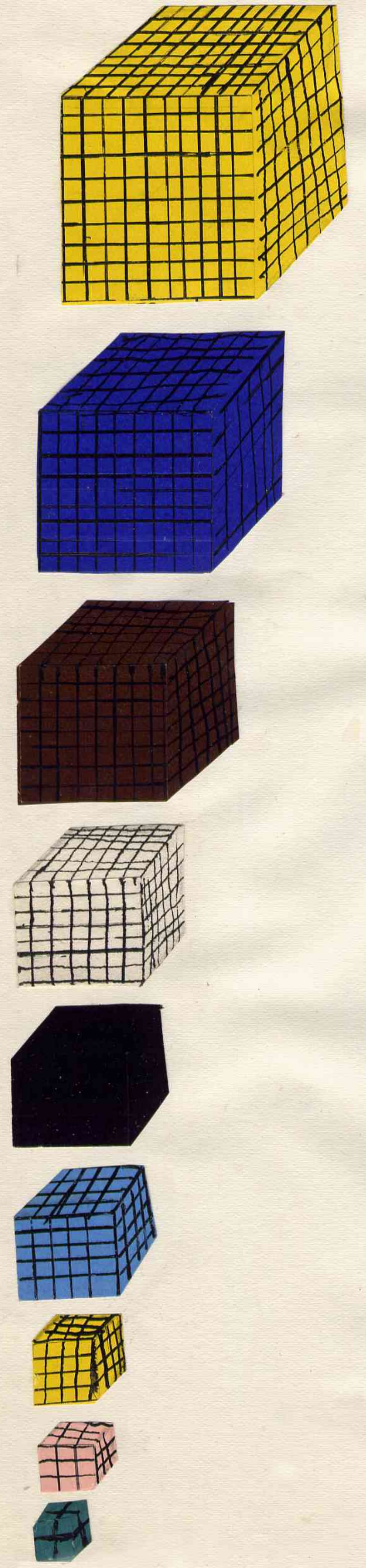
2 0 0 2 9

9 ×

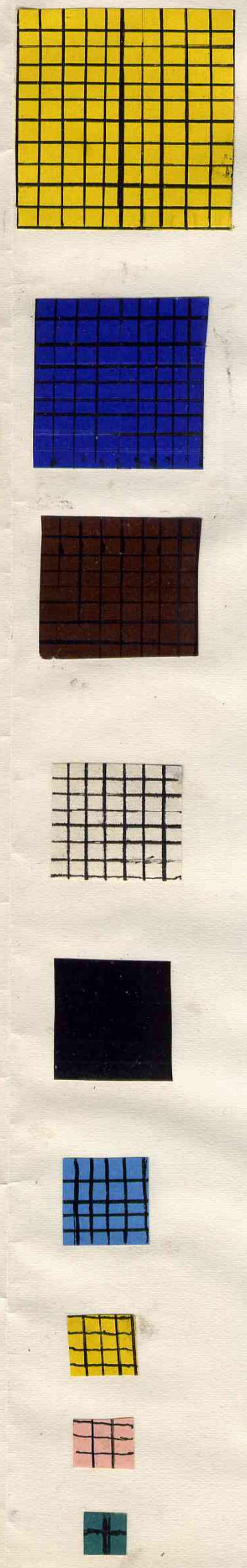
1 8 0 2 6 1



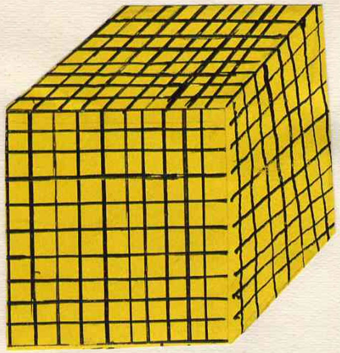
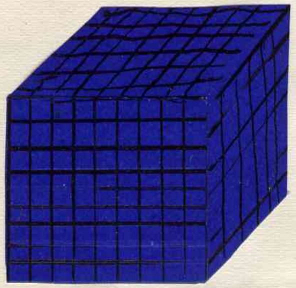
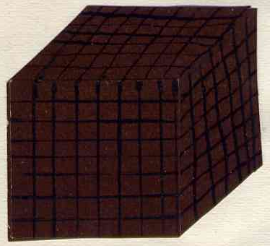
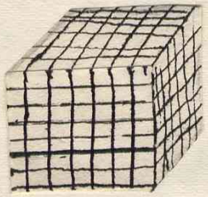
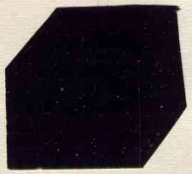
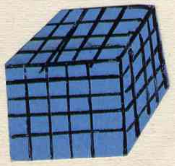
Notation of Powers — The final Layout of all cards and bead material —

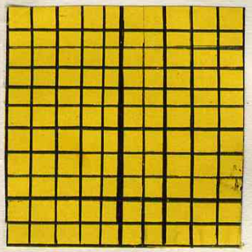
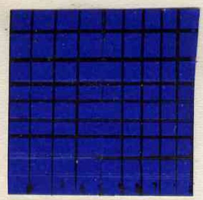
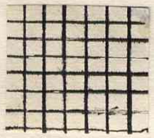


$10 \times 10 \times 10$	$10^2 \times 10$	10^3	1000	10×10	10^2	100
$9 \times 9 \times 9$	$9^2 \times 9$	9^3	729	9×9	9^2	81
$8 \times 8 \times 8$	$8^2 \times 8$	8^3	512	8×8	8^2	64
$7 \times 7 \times 7$	$7^2 \times 7$	7^3	343	7×7	7^2	49
$6 \times 6 \times 6$	$6^2 \times 6$	6^3	216	6×6	6^2	36
$5 \times 5 \times 5$	$5^2 \times 5$	5^3	125	5×5	5^2	25
$4 \times 4 \times 4$	$4^2 \times 4$	4^3	64	4×4	4^2	16
$3 \times 3 \times 3$	$3^2 \times 3$	3^3	27	3×3	3^2	9
$2 \times 2 \times 2$	$2^2 \times 2$	2^3	8	2×2	2^2	4



Ded

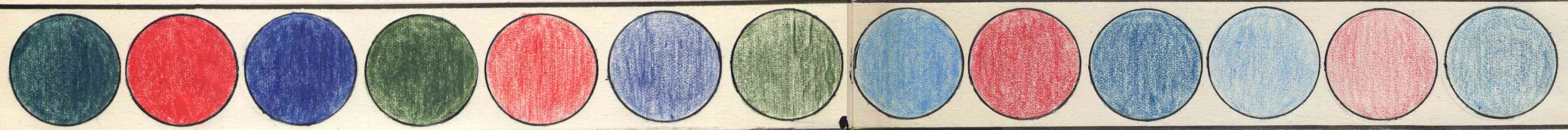
	$10 \times 10 \times 10$	$10^2 \times 10$	10^3	1000
	$9 \times 9 \times 9$	$9^2 \times 9$	9^3	729
	$8 \times 8 \times 8$	$8^2 \times 8$	8^3	512
	$7 \times 7 \times 7$	$7^2 \times 7$	7^3	343
	$6 \times 6 \times 6$	$6^2 \times 6$	6^3	216
	$5 \times 5 \times 5$	$5^2 \times 5$	5^3	125
	$4 \times 4 \times 4$	$4^2 \times 4$	4^3	64
	$3 \times 3 \times 3$	$3^2 \times 3$	3^3	27
	$2 \times 2 \times 2$	$2^2 \times 2$	2^3	8

	10×10	10^2	100
	9×9	9^2	81
	8×8	8^2	64
	7×7	7^2	49
	6×6	6^2	36
	5×5	5^2	25
	4×4	4^2	16
	3×3	3^2	9
	2×2	2^2	4

Das Dezimalsystem wird auf den Bereich der Brüche ausgedehnt

Dies ist eine Leitkarte

1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00 001	0,00 0001



1000000	100 000	10 000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$

1 0 , 1

1 0 0 , 0 1

1 0 0 0 , 0 0 1

1 0 0 0 0 , 0 0 0 1

1 0 0 0 0 0 , 0 0 0 0 1

Das Schreiben der Dezimalbrüche

wird mit der Leitkarte und einem Kartensatz:

1 ... 2 3 4 5 6 7 8 9

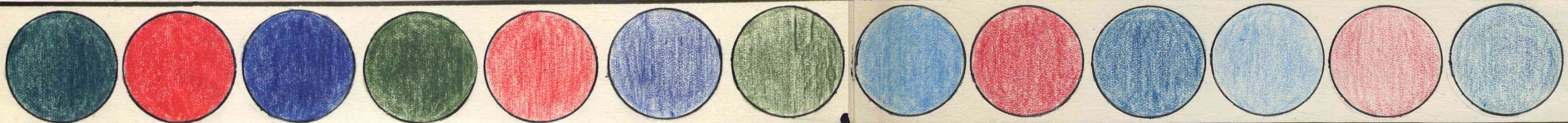
, 0 00 000 0000

eingeführt. Die Stelle der Einer bilden den Wendepunkt.
Wir legen mit den Karten 10.
Auf der Einerstelle liegt eine 0.
Wir legen mit den Karten $\frac{1}{10}$ oder 0,1
Auf der Einerstelle liegt wieder eine Null. Die ganzen Zahlen sind von den Bruchzahlen durch ein Komma getrennt.
Auf diese Weise können vom Kind die verschiedenen Kombinationen gelegt werden.
Die Bedeutung der Null wird dem Kind erneut ins Bewußtsein gebracht.
Hinzu kommt die Bedeutung des Kommas, das Bruchzahlen von ganzen Zahlen trennt.

Das Dezimalsystem wird auf den Bereich der Brüche ausgedehnt

Dies ist eine Leitkarte

1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00 001	0,00 0001



1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$

					1	0,	1					
				1	0	0,	0	1				
			1	0	0	0,	0	0	1			
		1	0	0	0	0,	0	0	0	1		
	1	0	0	0	0	0,	0	0	0	0	1	

Das Schreiben der Dezimalbrüche

wird mit der Leitkarte und einem Kartensatz:

$\boxed{1}$ ... 2 3 4 5 6 7 8 9

$\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{00}$ $\boxed{000}$ $\boxed{0000}$

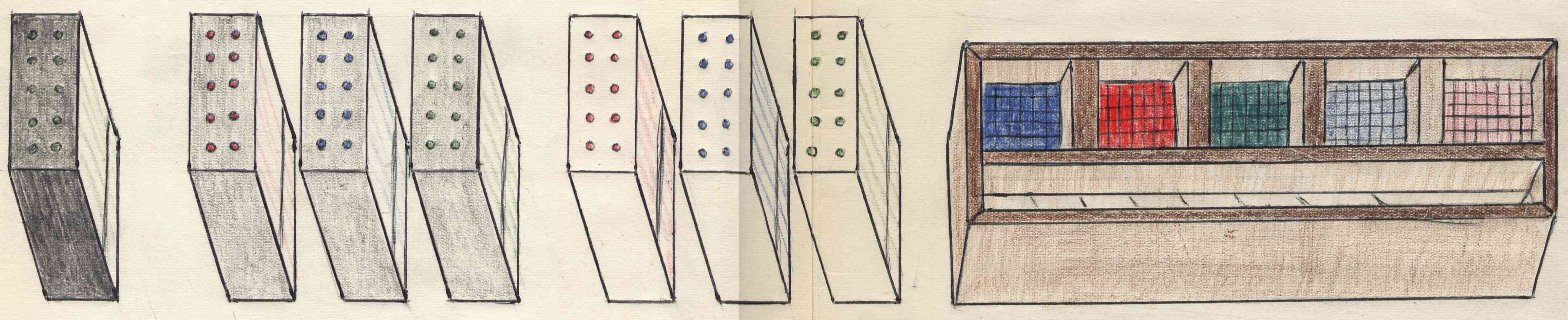
eingeführt. Die Stelle der Einer bilden den Wendepunkt.
Wir legen mit den Karten 10.
Auf der Einerstelle liegt eine 0.
Wir legen mit den Karten $\frac{1}{10}$ oder 0,1
Auf der Einerstelle liegt wieder eine Null. Die ganzen Zahlen sind von den Bruchzahlen durch ein Komma getrennt.

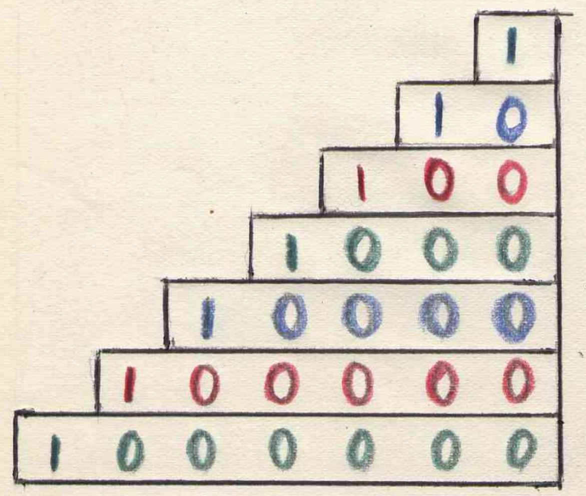
Auf diese Weise können vom Kind die verschiedenen Kombinationen gelegt werden.

Die Bedeutung der Null wird dem Kind erneut ins Bewußtsein gebracht.
Hinzu kommt die Bedeutung des Kommas, das Bruchzahlen von ganzen Zahlen trennt.

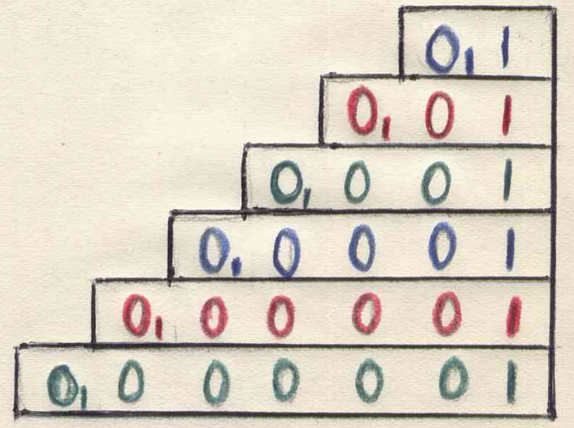
Das Dezimalsystem erweitert auf die Brüche
dargestellt in den bekannten bunten Perlen
mit Zusatzkasten für die Bruchzahlen

Ganze Zahlen — Bruchzahlen



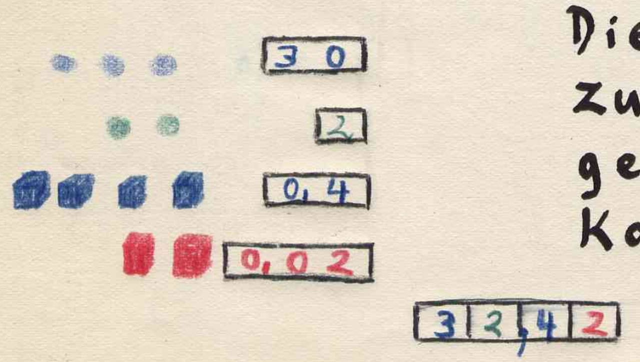


Ganze Zahlen



Bruchzahlen

Zunächst werden mit Karten und Perlen Zahlen gebildet.
Es können zuerst die Karten und dann die Perlen gelegt werden oder umgekehrt.



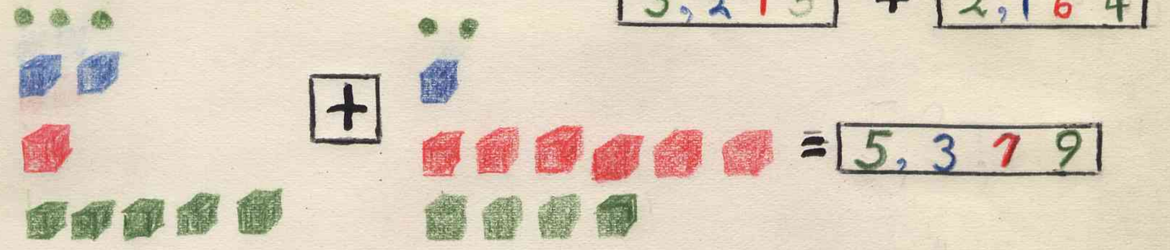
Die Karten werden zuerst neben die Werte gelegt. Dann werden die Karten in üblicher Weise übereinander geschoben.

Es werden dann einfache Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen ausgeführt.

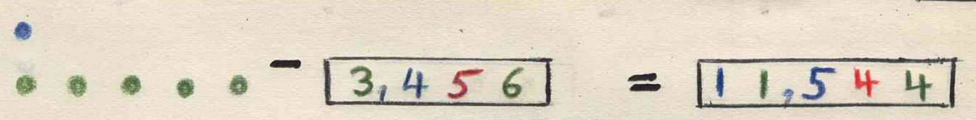
Dazu werden noch ein Satz einfacher Zahlen und Rechenzeichen benötigt.

1. Beispiel: Addition (als Einführung ohne Wechsel)

3,215 + 2,164



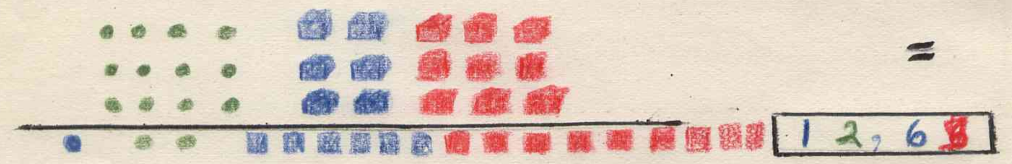
2. Beispiel: Subtraktion 15 − 3,456



Von 5 E. können 3 abgezogen werden. Um $\frac{4}{10}$ abziehen zu können, wird ein E. in Zehntel umgetauscht. Ein Zehntel wird in Hundertstel umgetauscht + ein Hundertstel wird in Tausendstel umgetauscht.

3. Beispiel: Multiplikation – Ganze Zahl m. Bruch

3 × 4,23

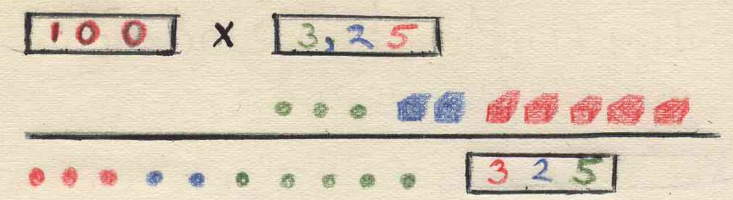


4. Beispiel: Multiplikation eines Bruches mit 10, 100, 1000

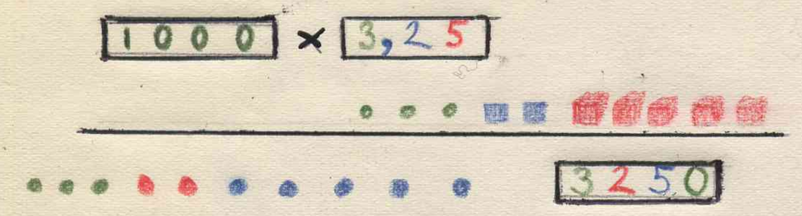
10 × 3,25
=
32,5

Der Multiplikant wird wie oben 10× untereinander gelegt und dann zusammengezählt angefangen mit kleinstem Wert.

Die Verschiebung des Kommas wird erfahren.



Wir fangen mit dem kleinsten Wert an.
100 x 5 Hundertstel = 5 Einer
100 x 2 Zehntel = 2 Zehner
100 x 3 Einer = 3 Hundert



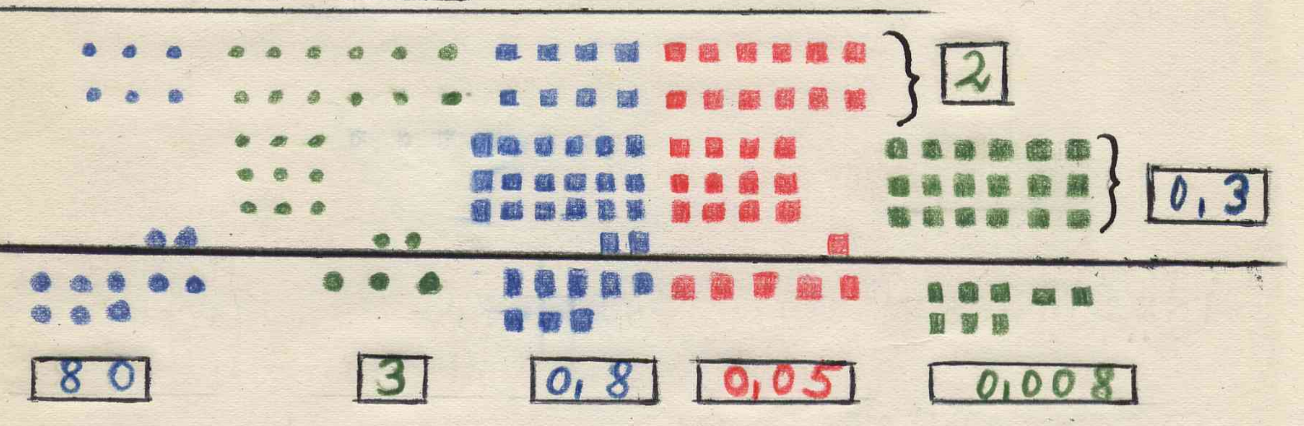
Wir fangen mit dem kleinsten Wert an.
1000 x 5 Hundertstel = 5 Zehner
1000 x 2 Zehntel = 2 Hundert
1000 x 3 Einer = 3 Tausend

6. Beispiel: Multiplikation einer Dezimalzahl mit einem Bruch + umgekehrt

Hier wird in Wirklichkeit geteilt	Hier wird einfach malgenommen
$0{,}1 \times 10 = \frac{1}{10} \times 10 = \frac{10}{10} = 1{,}0$	$10 \times 0{,}1 = 1{,}0$
$0{,}8 \times 10 = \frac{8}{10} \times 10 = \frac{80}{10} = 8{,}0$	$10 \times 0{,}8 = 8{,}0$
$2{,}4 \times 10 = 2\frac{4}{10} \times 10 = 20\frac{40}{10} = 24{,}0$	$10 \times 2{,}4 = 24{,}0$
$0{,}1 \times 100 = \frac{1}{10} \times 100 = \frac{100}{10} = 10{,}0$	$100 \times 0{,}1 = 10{,}0$
$0{,}8 \times 100 = \frac{8}{10} \times 100 = \frac{800}{10} = 80{,}0$	$100 \times 0{,}8 = 80{,}0$
$2{,}4 \times 100 = 2\frac{4}{10} \times 100 = 200\frac{400}{10} = 240{,}0$	$100 \times 2{,}4 = 240{,}0$

7. Beispiel: Multiplikation Bruch mit Bruch

36,46 × 2,3

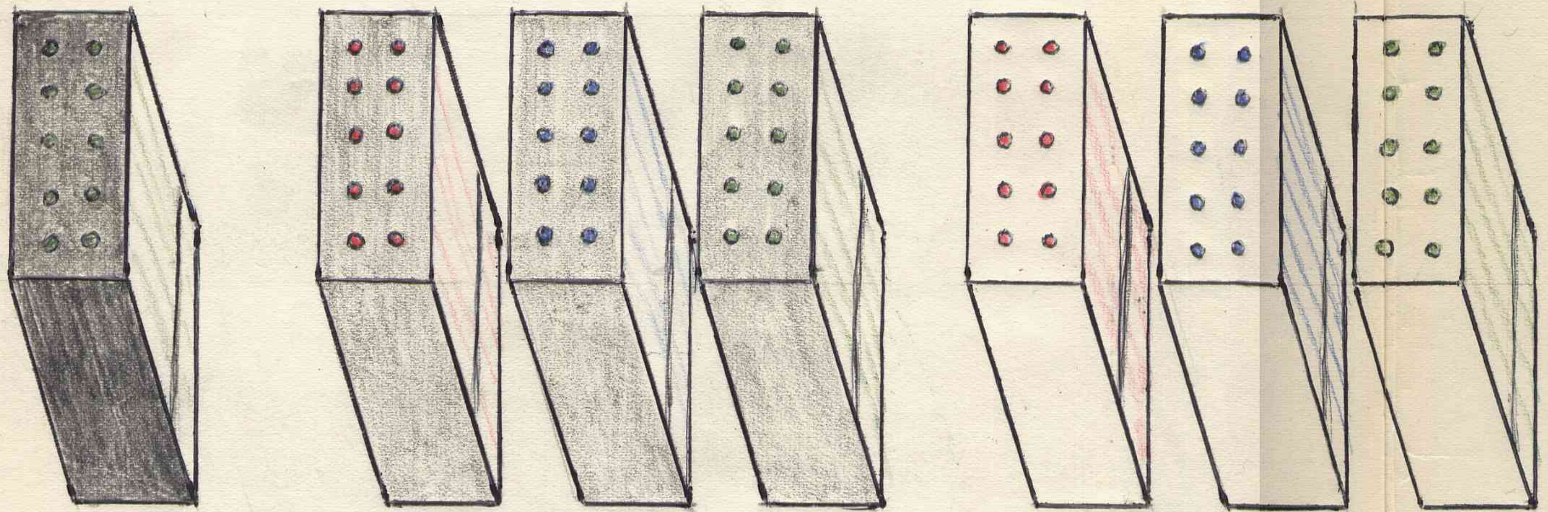


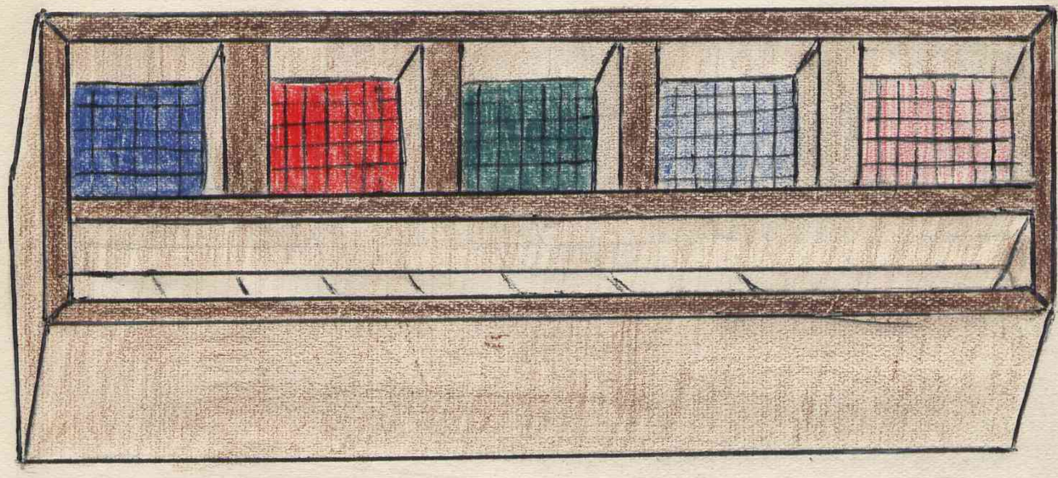
83,858

Das Dezimalsystem erweitert auf die Brüche dargestellt in den bekannten bunten Perlen mit Zusatzkasten für die Bruchzahlen

Ganze Zahlen

Bruchzahlen





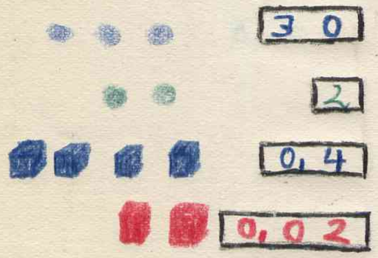
1
1 0
1 0 0
1 0 0 0
1 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0

Ganze Zahlen

0,1
0,0 1
0,0 0 1
0,0 0 0 1
0,0 0 0 0 1
0,0 0 0 0 0 1

Bruchzahlen

Zunächst werden mit Karten und Perlen Zahlen gebildet.
Es können zuerst die Karten und dann die Perlen gelegt werden oder umgekehrt.



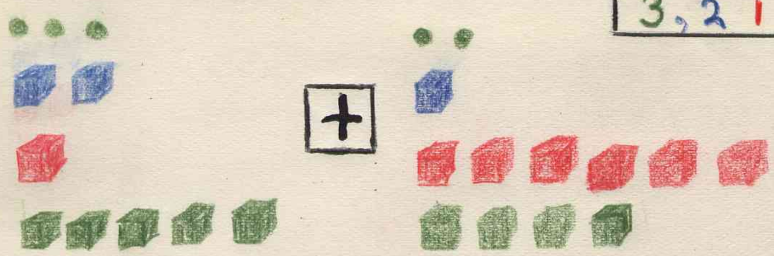
Die Karten werden zuerst neben die Werte gelegt. Dann werden die Karten in üblicher Weise übereinander geschoben.

Es werden dann einfache Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen ausgeführt.

Dazu werden noch ein Satz einfacher Zahlen und Rechenzeichen benötigt.

1. Beispiel: Addition (als Einführung ohne Wechsel)

$\boxed{3,215} + \boxed{2,164}$



$= \boxed{5,379}$

2. Beispiel: Subtraktion

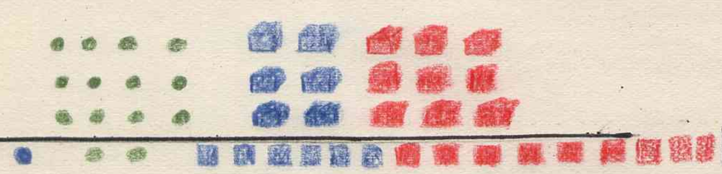
$\boxed{15} - \boxed{3,456}$

$- \boxed{3,456} = \boxed{11,544}$

Von 5 E. können 3 abgezogen werden. Um $\frac{4}{10}$ abziehen zu können, wird ein E. in Zehntel umgetauscht. Ein Zehntel wird in Hundertstel umgetauscht + ein Hundertstel wird in Tausendstel umgetauscht.

3. Beispiel: Multiplikation – Ganze Zahl m. Bruch

$\boxed{3} \times \boxed{4,23}$



$=$

$\boxed{12,69}$

4. Beispiel: Multiplikation eines Bruches mit 10, 100, 1000

$\boxed{10} \times \boxed{3,25}$

$=$

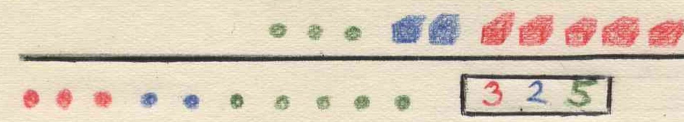
$\boxed{32,5}$

Der Multiplikant wird wie oben 10× untereinander gelegt und dann zusammengezählt angefangen mit kleinstem Wert.

Die Verschiebung des Kommas wird erfahren.

$\boxed{100} \times \boxed{3,25}$

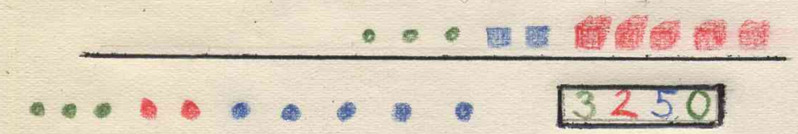
Wir fangen mit dem kleinsten Wert an.
100× 5 Hundertstel = 5 Einer
100× 2 Zehntel = 2 Zehner
100× 3 Einer = 3 Hundert



$\boxed{325}$

$\boxed{1000} \times \boxed{3,25}$

Wir fangen mit dem kleinsten Wert an.
1000× 5 Hundertstel = 5 Zehner
1000× 2 Zehntel = 2 Hundert
1000× 3 Einer = 3 Tausend



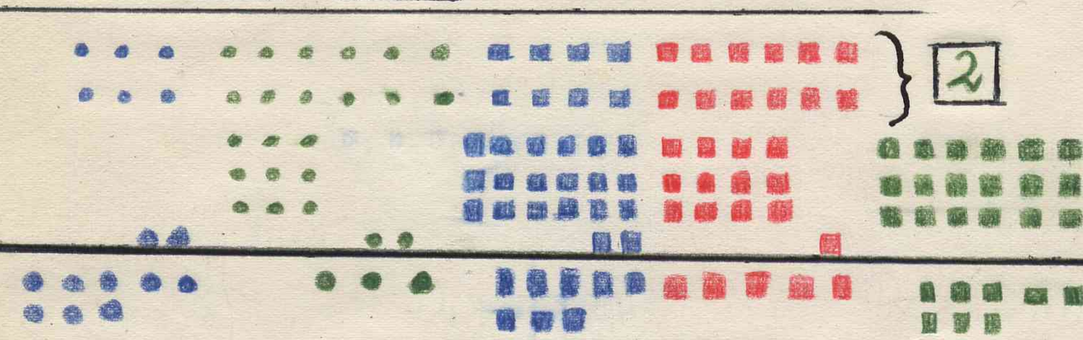
$\boxed{3250}$

6. Beispiel: Multiplikation einer Dezimalzahl mit einem Bruch + umgekehrt

Hier wird in Wirklichkeit geteilt	Hier wird einfach malgenommen
$0,1 \times 10 = \frac{1}{10} \times 10 = \frac{10}{10} = 1,0$	$10 \times 0,1 = 1,0$
$0,8 \times 10 = \frac{8}{10} \times 10 = \frac{80}{10} = 8,0$	$10 \times 0,8 = 8,0$
$2,4 \times 10 = 2\frac{4}{10} \times 10 = 20\frac{40}{10} = 24,0$	$10 \times 2,4 = 24,0$
$0,1 \times 100 = \frac{1}{10} \times 100 = \frac{100}{10} = 10,0$	$100 \times 0,1 = 10,0$
$0,8 \times 100 = \frac{8}{10} \times 100 = \frac{800}{10} = 80,0$	$100 \times 0,8 = 80,0$
$2,4 \times 100 = 2\frac{4}{10} \times 100 = 200\frac{400}{10} = 240,0$	$100 \times 2,4 = 240,0$

7. Beispiel: Multiplikation Bruch mit Bruch

$\boxed{36,46} \times \boxed{2,3}$



$\boxed{2}$

$\boxed{0,3}$

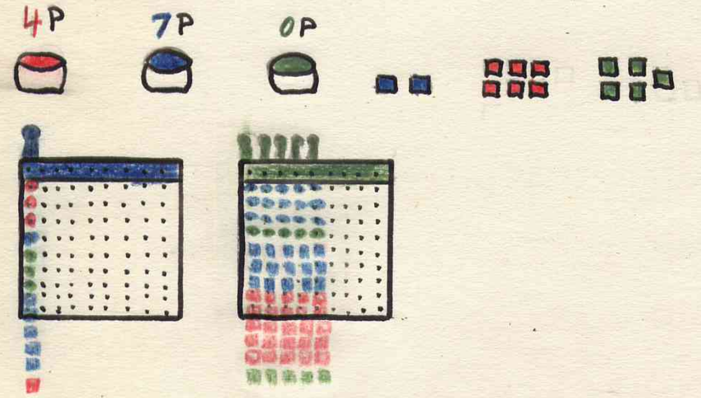
$\boxed{80}$ $\boxed{3}$ $\boxed{0,8}$ $\boxed{0,05}$ $\boxed{0,008}$

$\boxed{83,858}$

Die Division mit Dezimalbrüchen

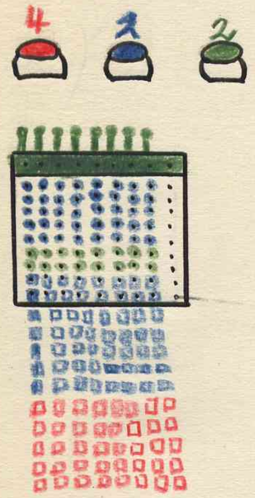
1. Division eines Dezimalbruchs mit einer ganzen Zahl.
2. " einer ganzen Zahl mit einer ganzen Zahl, die im Resultat einen Rest enthält, der in einem Dezimalbruch ausgedrückt werden kann.
3. " eines Dezimalbruchs mit einem Dezimalbruch.

Wir können die Division mit den Dezimalbrüchen an Hand des Materials zeigen. Wie lange die Kinder mit dem Material arbeiten und wie schnell zur Abstraktion übergegangen werden kann, hängt vom Kinde ab.
Wenn wir den Vorgang im Material zeigen, wird zunächst nichts geschrieben, da dies den tatsächlichen Vorgang unterbricht.
Das Schreiben kann nach der Einführung früher oder später gezeigt werden.

1) 

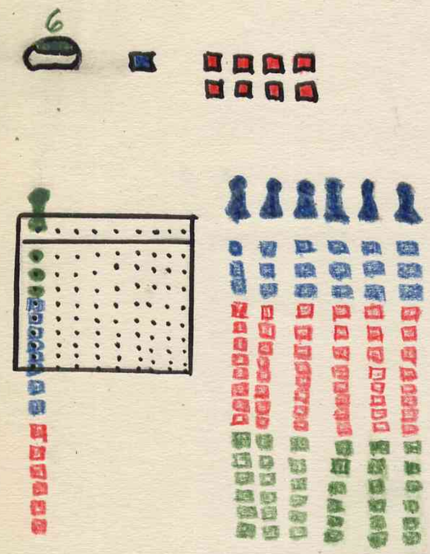
470,265 : 15 = 31,351
45
20
15
52
45
76
75
15

Wenn man die Zwischenresultate liegen läßt, kann man das Resultat unter den Einern ablesen. Das, was ein Einer erhält, ist das Resultat.

2.) 

422 : 8 = 52,75
40
22
16
60
56
40
40

Die restlichen Einer wurden in Zehntel und schließlich Hundertstel umgewandelt.
Ganze Zahlen und Bruchzahlen werden durch Komma getrennt.

3.) 

6,18 : 1,6 =

Mit dem Material erfahren wir das Resultat.
Es heißt: 3,86 R. $\frac{4}{1000}$

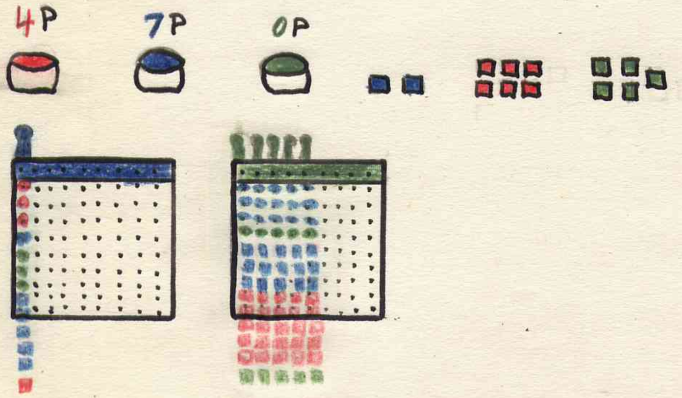
Um die Aufgabe abstrakt rechnen zu können, müssen wir Divisor + Multiplikant mit 10 mal nehmen, um aus dem Divisor eine ganze Zahl zu machen.

61,8 : 16 = 3,86 R 4
48
138
128
100
96
4

Die Division mit Dezimalbrüchen

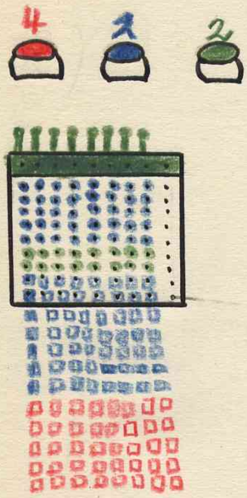
1. Division eines Dezimalbruchs mit einer ganzen Zahl.
2. " einer ganzen Zahl mit einer ganzen Zahl, die im Resultat einen Rest enthält, der in einem Dezimalbruch ausgedrückt wer=den kann.
3. " eines Dezimalbruchs mit einem Dezimalbruch

Wir können die Division mit den Dezimalbrüchen an Hand des Materials zeigen. Wie lange die Kinder mit dem Material arbeiten und wie schnell zur Abstraktion übergegangen werden kann, hängt vom Kinde ab.
Wenn wir den Vorgang im Material zeigen, wird zunächst nichts geschrieben, da dies den tat=sächlichen Vorgang unterbricht.
Das Schreiben kann nach der Einführung früher oder später gezeigt werden

1) 

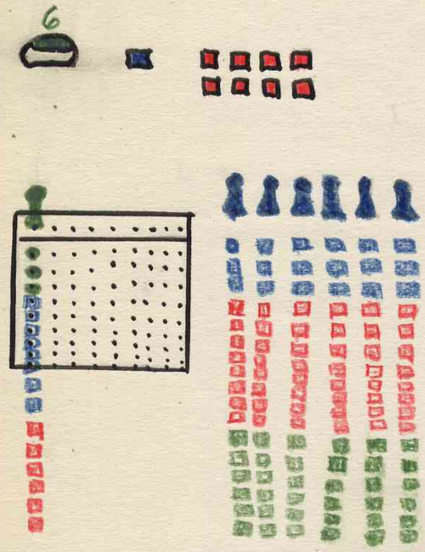
470,265 : 15 = 31,351
45
20
15
52
45
76
75
15

Wenn man die Zwischenresultate liegen läßt, kann man das Resultat unter den Einern ablesen. Das, was ein Einer erhält, ist das Resultat.

2.) 

$$\begin{array}{l} 422 : 8 = \underline{\underline{52,75}} \\ \underline{40} \\ \;\;22 \\ \;\;\underline{16} \\ \;\;\;\;60 \\ \;\;\;\;\underline{56} \\ \;\;\;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;\underline{\underline{40}} \end{array}$$

Die restlichen Einer wurden in Zehntel und schließlich Hundertstel umgewandelt.
Ganze Zahlen und Bruchzahlen werden durch Komma getrennt.

3.) 

6,18 : 1,6 =

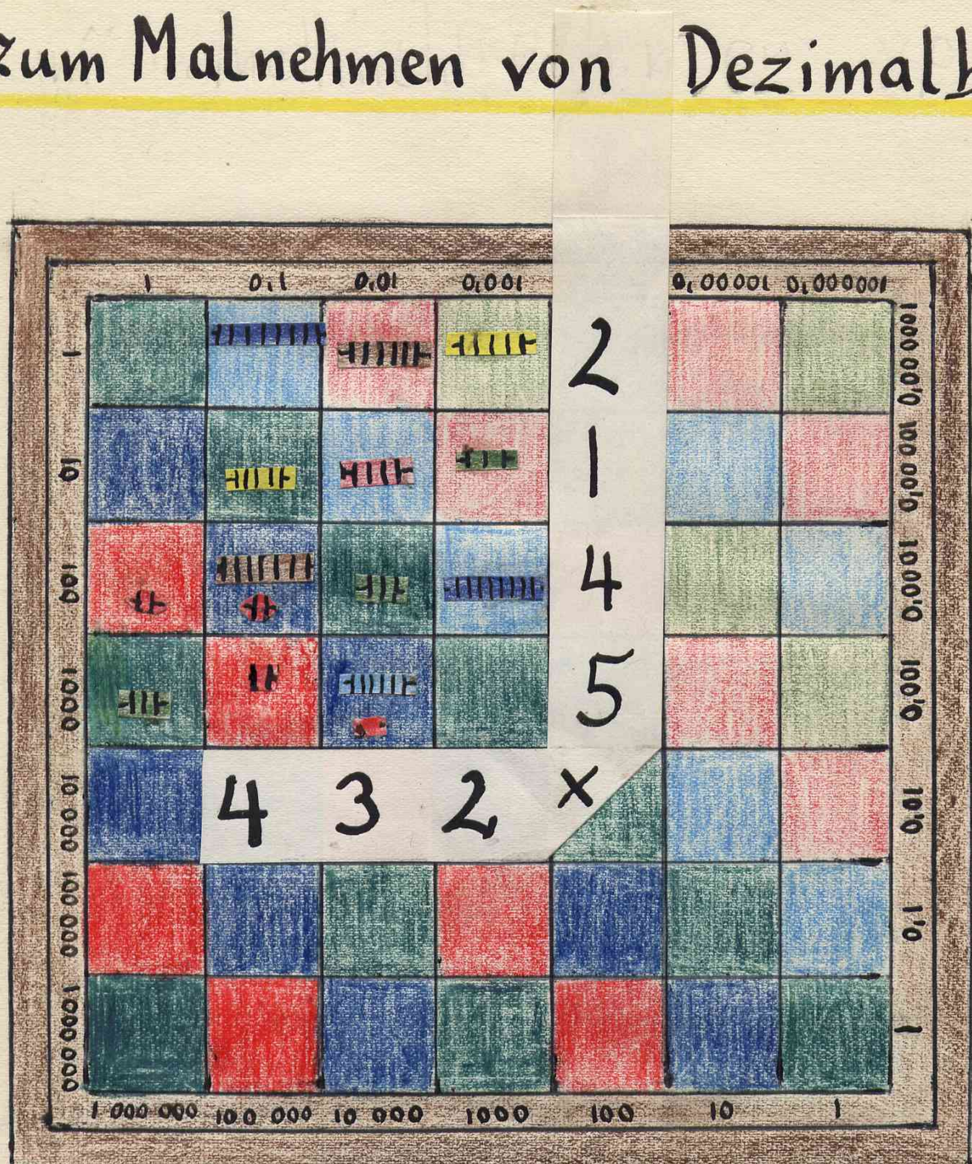
Mit dem Material erfahren wir das Resultat.
Es heißt: 3,86 R. $\frac{4}{1000}$

Um die Aufgabe abstrakt rechnen zu können, müssen wir Divisor + Multiplikant mit 10 mal nehmen, um aus dem Divisor eine ganze Zahl zu machen.

$$\begin{array}{l} 61,8 : 16 = \underline{\underline{3,86\ R\ 4}} \\ \underline{48} \\ 138 \\ \underline{128} \\ \;\;100 \\ \;\;\;\;\underline{96} \\ \;\;\;\;\;\;4 \end{array}$$

Das Multiplikationsbrett

zum Malnehmen von Dezimalbrüchen



Die Multiplikation mit ganzen Zahlen ist den Kindern auf dem großen Multiplikationsbrett geläufig. Dieses Brett ist lediglich eine Erweiterung in den Raum der Dezimalbrüche. Die Art der Zahlenkombination bestimmt jeweils den Platz, an den wir unsere Multiplikationszahlen anlegen. Sind alle Zahlen miteinander malgenommen, werden, wie gewöhnlich, die einzelnen Resultate zusammengeschoben. Die Aufgabe selbst braucht nicht auf dem Brett dargestellt zu werden.

Wenn die Kinder lange genug auf dem Multiplikationsbrett gearbeitet haben, zeigen wir ihnen das schriftliche Multiplizieren. Das Verhalten der Bruchzahlen konnte ausgiebig beobachtet werden.

```
432 × 5,412
-----------
        864
       432.
     1728..
    2160,...
-----------
   2337,984
===========
```

Die Regel für das schrifliche Multiplizieren heißt: Wir nehmen ohne Rücksicht auf das Komma mal. Das Resultat erhält so viele Stellen nach dem Komma wie die beiden Mutiplikationszahlen zusammen enthalten.

Über das erweiterte Würfelmaterial

das zum Finden der Würfelwurzel führt .

Das Material: Es besteht aus 9 Holzwürfeln in der Größe von 1cbcm bis 9cbcm. Jeder dieser Würfel entspricht in der Farbe den Würfeln im Kettenkasten. Zu je= dem Würfel gehören außerdem noch etwa 30 Quadrate in gleicher Farbe des entsprechenden Würfels. Auf der Oberfläche der Würfel und Quadrate sind in 1cm Abstand in beiden Richtungen Linien eingeritzt, die ein Errechnen der Würfelgröße ermöglichen. In Blatt A Abb. 1 und 2 findet sich die Anwendung eines Tels des Materials.

Ziel des Materials:

Es dient zur Komposition verschieden großer Würfel. Durch diese Tätigkeit wird dad Kind mit den ver= schiedenen Kombinationsmöglichkeiten bekannt. Die Ableitung für die algebraische Formel ist nach dieser Tätigkeit möglich.

Als das Quadratwurzelziehen vorbereitet wurde, haben wir zu= nächst verschieden große Quadrate gebildet, die nicht über die Zahl 10 als Größe einer Seite hinaus gingen. So haben wir aus 4 Quadrat 7 Quadrat gebildet, indem wir an jeder Seite 3 . 4 und ein 3Quadrat in das freibleibende Feld eingefügt haben. Auf diese Weise lernte das Kind die verschiedenen Teile kennen, die beim Bau eines Quadrates entstehen.

Der gleiche Vorgang wiederholt sich nun, wenn wir an die Vor= bereitung des Wurzelziehens für den Würfel gehen.

Da ein Würfel nicht nur zwei, sondern drei Ausdehnungen hat, ist es erklärlich, daß wir bei der Komposition drei Seiten be= rücksichtigen müssen.

In Blatt A Abb. 1 sehen wir, wie aus einem Würfel 3^3 ein Würfel 5^3 entsteht. In Abb 2 sehen wir, wie ein Würfel aus drei verschiedenen Zahlen komponiert ist. Die Kinder werden, wenn sie einmal in die Arbeit eingeführt sind, versuchen, noch mehr Zahlen zur Komposition zu benutzen. Das Material setzt jedoch Grenzen. Sie können die Werte der einzelnen Teile errechnen und dann zu= sammenzählen. Eine Tafel mit den Werten der Würfel (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729)steht den Kindern als Kontrolle zur Ver= fügung. Die Erfahrung lehrt, daß es die Seiten der Würfel sind, die die auszufüllanden Plätze bestimmen. Diese Arbeit an sich ist nichts Neues für die Kinder. In beschränktem Maße konnte diese Arbeit schon mit dem Perlenmaterial ausgeführt werden.[x]

Der nächste Schritt besteht nun in der Bewußtmachung des bisher Erlebten nämlich, daß die Seiten der Würfel es sind, die alle übrigen Teile bestimmen.

Dazu geben wir den Kindern zwei Würfel in die Hand. Der eine ist aus zwei Zahlen und der andere aus drei Zahlen zusammengesetzt. (Binominal und Trinominal Cube). Diese beiden Würfel sind den Kin= dern schon bekannt. Sie haben sie als Puzzlespiel früher zusam= mengesetzt mit Hilfe der leitenden Farben. Dies war eine indirekte Vorbereitung für das, was nun kommt. Sie kennen die einzelnen For= men und sie wissen wie die einzelnen Teile zueinander passen. Es fehlt nur noch eins und das ist der Name zu den einzelnen Tei= len. Mit der Namengebung erfolgt gleichzeitig die Bewußtmachung

Die Kinder legen das, was sie rechnen in Kartenmaterial aus. Sie benutzen Zahlenkarten, Pluszeichen + Klammern. Später schreiben sie nur.

eines schon bekannten Dinges.
In Blatt B Abb. 1 und 2 sind beide Würfel in ihre Teile zerlegt und mit Namenkärtchen versehen.

<u>Arbeit der Kinder</u>

3 Kartensätze:
1. Karten mit Buchstaben
2. " " Buchstaben + Wert zeichen
3. " " Wert in Zahl + Wert in Buchst.

Zunächst wird in einer Lektion die Namengebung vorgenommen.
Die beiden Würfel bekommen zunächt die Namen a und b. Wenn es sich um den dreigeteilten Würfel handelt kommt noch c hinzu. Bei der ersten Einführung der Namen, wählen wir jedoch den den Würfel a + b.
Dann werden die andern Teile aus a und b komponiert. Die Namenkärtchen werden an die einzelnen Teile gelegt. Dann, nach dieser Einführung, folgt der Rest einer Dreistufen Lektion. Das Kind bewegt die einzelnen Teile von einer Stelle zur andern auf Wunsch des Lehrers und schließlich frgt der Lehrer: " Was ist dies" oder "was ist das.

Abb. Blatt C

Würfel aus drei verschiedenen Werteinheiten gebaut.

Ein dritter Würfel, der aus drei Zahlen komponiert ist, dient zur Einführung verschiedener Werte und zwar:
Einer, Zehner und Hunderter.
In Größe und Form gleicht dieser Würfel dem Würfel a+b+c. Er unterscheidet sich lediglich in der Farbengebung. Jede Werteinheit wird durch eine Farbe dargestellt. Statt der Namen a, b, und c , die die allgemeine algebraische Formel darstellen, geben wir den einzelnen Würfeln einen Namen, der ihrem Wert entspricht. Der erste Würfel ist aus Einern gebildet, der zweite aus Tausendern und der dritte aus Millionen.
Abgekürzt bezeichnen wir sie als e^3, z^3, h^3 oder auf englisch u^3, t^3, h^3. Die übrigen Teile werden aus diesen Namen zusammengesetzt. Die Farbe der Teile bezieht sich auf die Werteinheit, die sich aus der Multiplikation der einzelnen Seiten ergibt.

$u^3 = u \cdot u \cdot u$ = Units
$u^2t = u \cdot u \cdot t$ = tens
$ut^2 = u \cdot t \cdot t$ = hundreds
$u^2h = u \cdot u \cdot h$ = "
$t^3 = t \cdot t \cdot t$ = thousands
$htu = h \cdot t \cdot u$ = thousands
$ht^2 = h \cdot t \cdot t$ = tenthous.
$h^2u = h \cdot h \cdot u$ = tenthous.
$h^2t = h \cdot h \cdot t$ = hundredthous.
$h^3 = h \cdot h \cdot h$ = millions

In diesem Fall ist also die allgebraische Formel auf bestimmte Werte bezogen und deshalb verwandeln wir die allgemeinen Namen in bestimmte.
Die Kinder können beide Würfel in einer Prozession aufstellen und die Namen dazu legen. Um mit den Namen vertrauter zu werden, können die Kärtchen ausgetauscht werden. Zum Beispiel a^3 entspricht h^3 usw.

Nachdem die Kinder mit dem Material so weit bekannt sind, können sie Würfel aus zwei verschiedenen Werteinheiten bauen. Später folgen dann drei und mehr Werteinheiten.

Fortsetuung über das Finden der Würfelwurzel

Zu Beginn dieser Arbeit ist es wahrscheinlich am besten, wenn wir den Kindern vorbereitete Karten geben, die mit Zahlen versehen sind, die zu einer glatten Wurzel führen.

Außerdem können sich die Kinder den Würfel a + b als Prozession aufbauen, der ihnen zunächst als Führer dient.

Daneben haben sie die Tabelle mit den verschiedenen Würfel= und Quadratzahlen liegen.(Inhalt:Grundlinie, Quadrat, Würfel und 3x Quadrat) .

Wir wählen als Beispiel die Zahl 389 017 geformt aus 73x73x73

Wir schreiben:Wurzel aus 389 017
Wir teilen die Zahl in Dreiergruppen, da der erste Würfel aus Einern (aufgelöste Zehner und Hunderter) besteht, der zweite Würfel aus Tausendern (aufgelöste Hundert und Zehntausender) usw.
Die Teilung wird natürlich von links her vorgenommen.
Wir finden den ersten Würfel indem wir die erste Gruppe - 398(000) mit unserer Tabelle vergleichen. Wir können einen 7 Würfel bauen und müssen 7x7x7 = 343 von 398 abziehen.
Es bleiben 46 Rest.
Als nächstes müssen wir 7^2 x 3 x ? abziehen. Dazu holen wir die nächste Zahl, in unserm Fall die Null,herunter. 7^2 x 3 = 49 x 3 = 147.
Diese Zahl muß nun mit der Grundseite unseres künftigen Würfels malgenommen werden. Dazu versuchen wir 147 durch 460 zu teilen. Es geht 3 mal. Wir nehmen für die Seite des künftigen Würfels 3 an
Wir ziehen 3x 147 = 441 von 460 ab.
Es bleiben 19 als Rest und wir holen die 1 herunter,um nun die Teile 3x3x 7 = 63 x 3= 189 abzuziehen. Es bleibt 2 als Rest und wir holen nun die Einer herunter und erhalten genau 27 mit dem wir unsern zweiten Würfel formen können.

```
   73
√398|017
 343
 ---
  46 0
  44 1
  ----
   1 91
   1 89
   ----
      27
      27
      --
      00
```

Wir machen die Probe, indem wir die einzelnen Teile addieren.

$$343\ 000 = t^3$$
$$44\ 100 = t^2u \times 3$$
$$1\ 890 = u^2t \times 3$$
$$27 = u^3$$
$$398\ 017 = t^3 + 3x(t^2u) + 3x(u^2t) + u^3$$

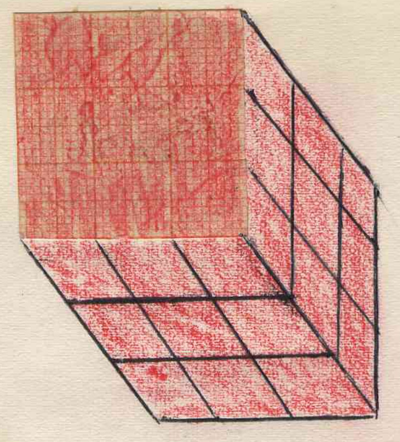
Es folgt noch ein Beispiel mit einer dreistelligen Wurzel.
Ich nehme die gleiche Zahl, die ich zum Bau des Würfels 5 + 3 + 2 verwandt habe. Der Unterschied besteht lediglich in der Werterteilung . Die Zahlen an sich bleiben die gleichen.

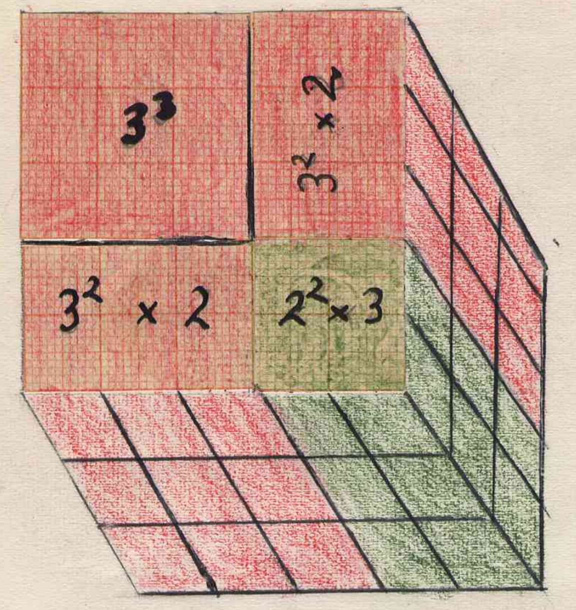
Anschließend gebe ich noch ein Beispiel indem ein Rest bleibt.

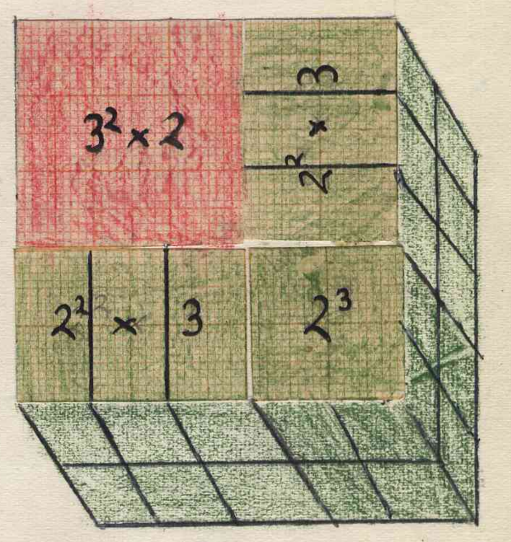
A

ABB. 1

From 3^3



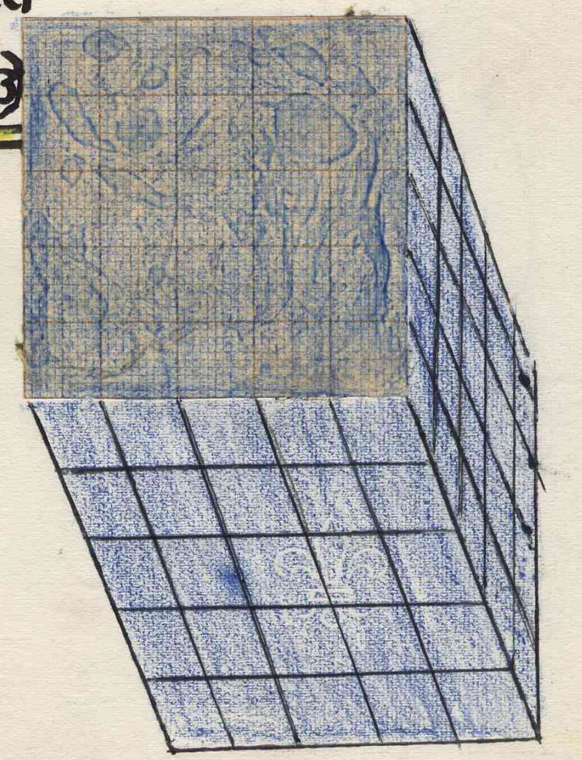




$3^3+2\times(3^2\times2)+(2^2\times3)$ $\quad + (3^2\times2)+2\times(2^2\times3)+2^3$

more simply expressed

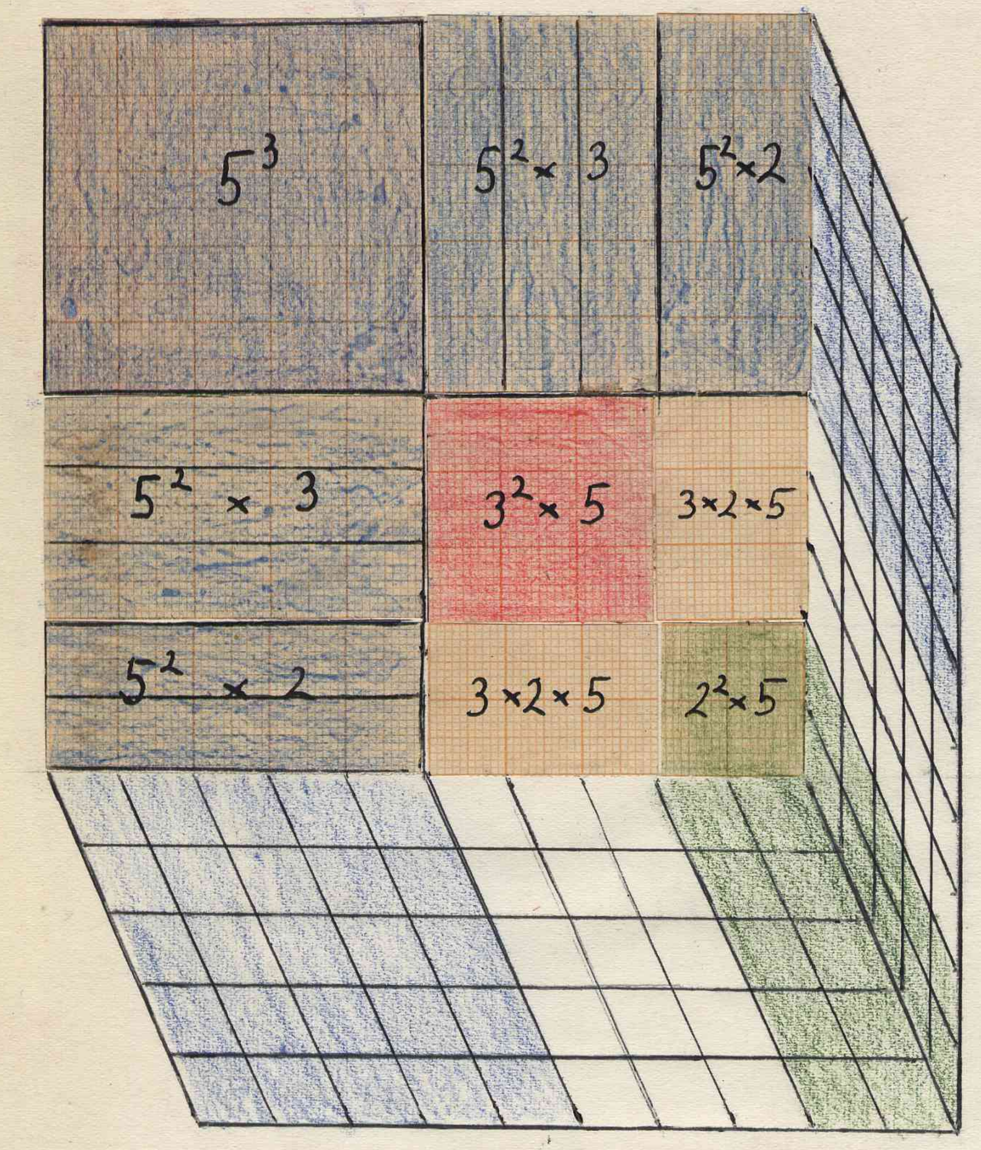
$3^3+3\times(3^2\times2)+2^3+3\times(2^2\times3)$



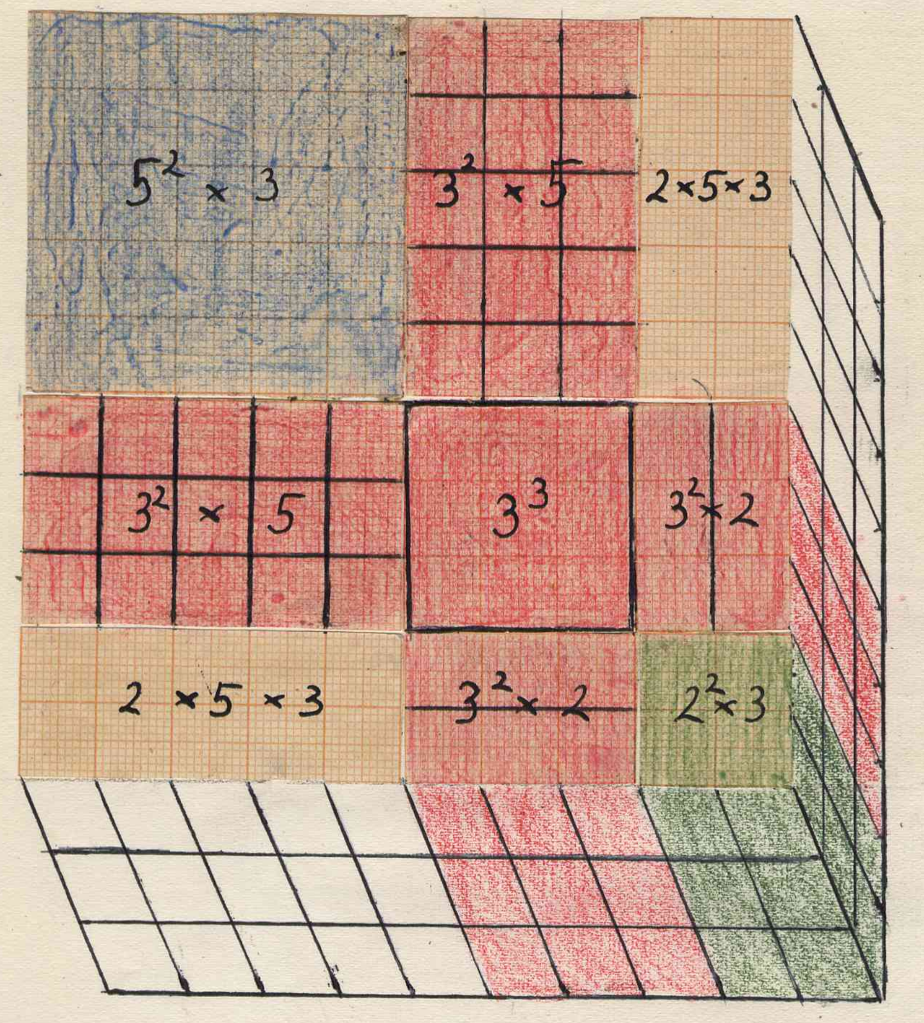
to 5^3

ABB. 2

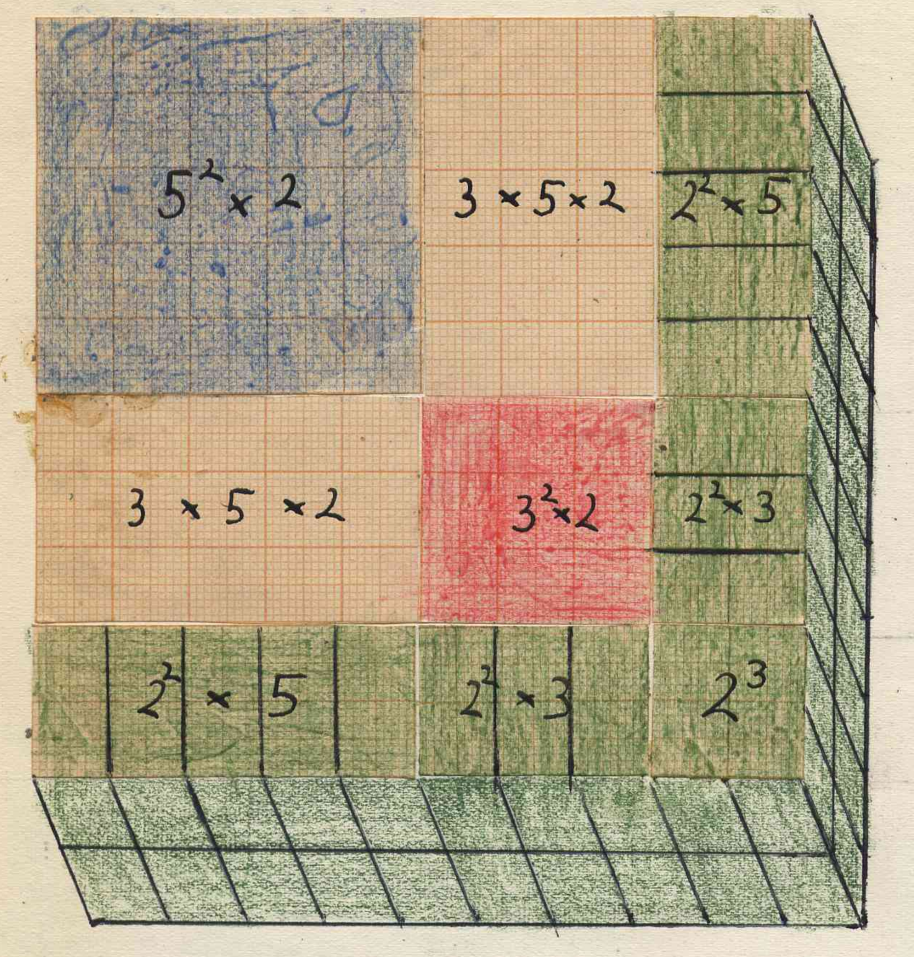
$(5+3+2)^3 = 10^3$



+



+



$5^3+2\times(5^2\times3)+2\times(5^2\times2)+(3^2\times5)+2\times(3\times2\times5)+(2^2\times5)$

125 + 150 + 100 + 45 + 60 + 20

500

$(5^2\times3)+2\times(3^2\times5)+2\times(2\times5\times3)+3^3+2\times(3^2\times2)+(2^2\times3)$

75 + 90 + 60 + 27 + 36 + 12

300

$(5^2\times2)+2\times(3\times5\times2)+2\times(2^2\times5)+(3^2\times2)+2\times(2^2\times3)+2^3$

50 + 60 + 40 + 18 + 24 + 8

200

$5^3+3\times(5^2\times3)+3\times(3^2\times5)+6\times(5\times3\times2)+3\times(2^2\times5)+3^3+3\times(2^2\times3)\times(3^2\times2)+2^3$

125
150
100
45
60
20
75
90
60
27
36
12
50
60
40
18
24
8

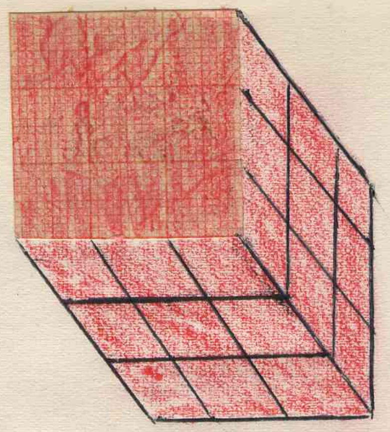
1000

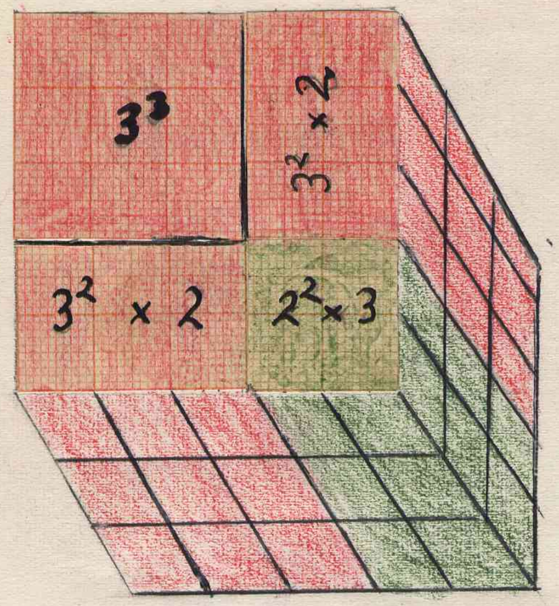
$10\times10\times10=1000$

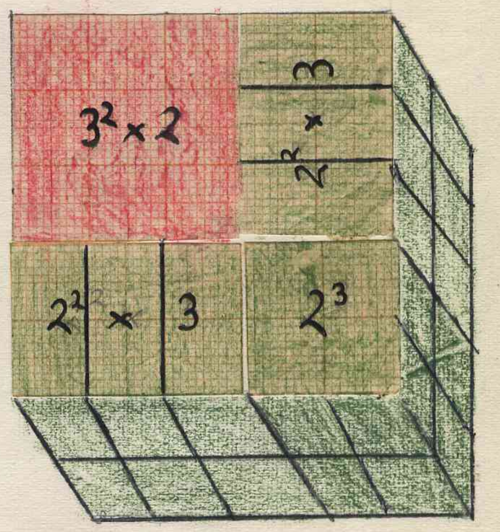
A

ABB. 1

From 3^3



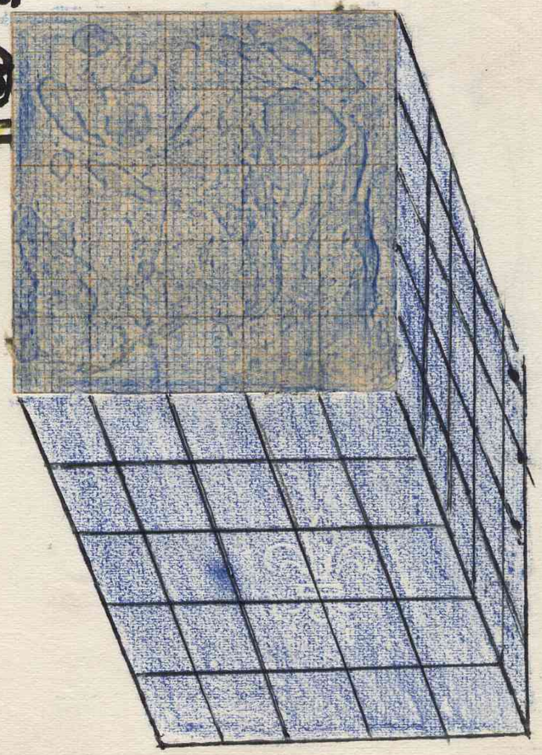




$3^3+2\times(3^2\times 2)+(2^2\times 3)$ $\quad + (3^2\times 2)+2\times(2^2\times 3)+2^3$

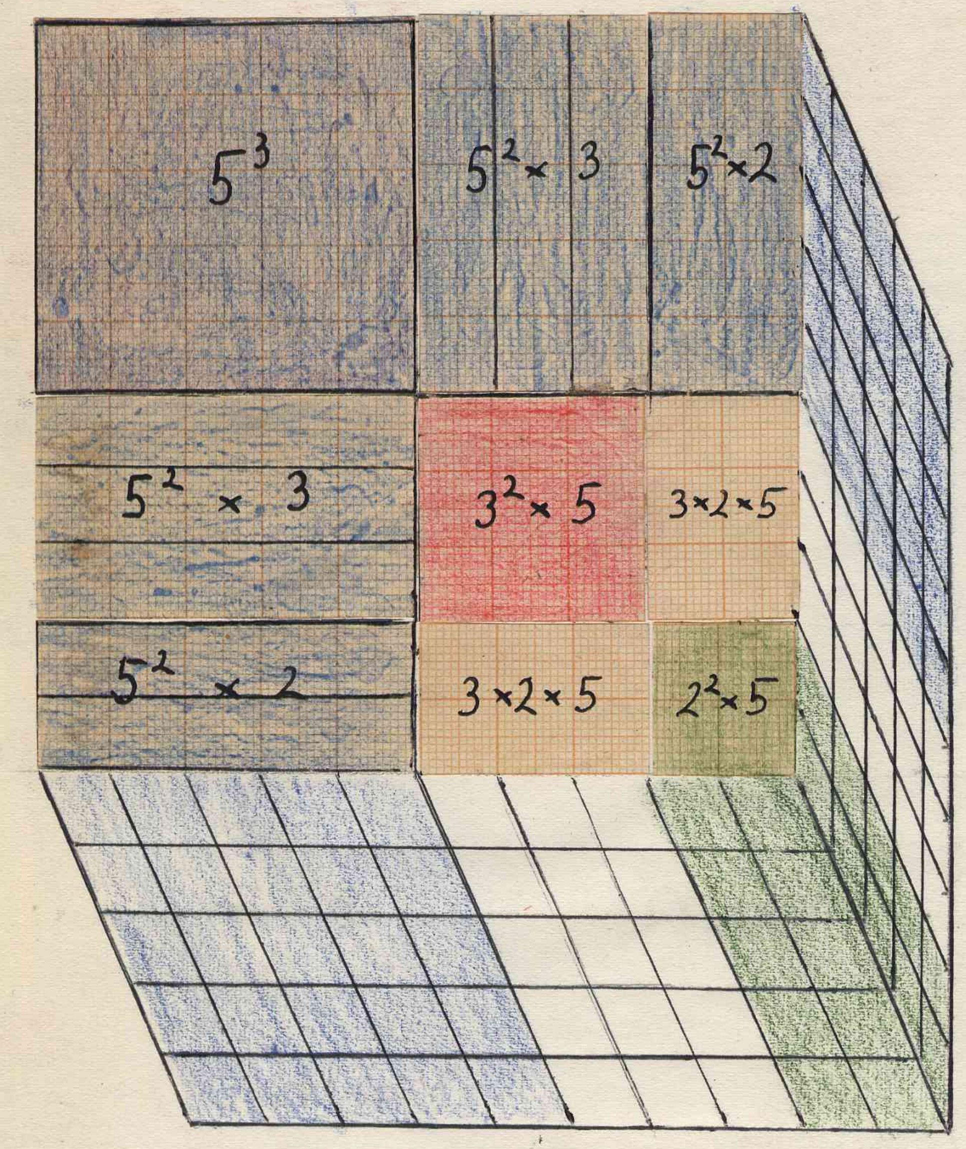
more simply expressed

$3^3+3\times(3^2\times 2)+2^3+3\times(2^2\times 3)$



to 5^3

ABB.



$5^3+2\times(5^2\times 3)+2\times(5^2\times 2)+(3^2\times 5)+2\times(3\times 2\times 5)+(2^2\times 5)$

$125+ \quad 150 \quad + \quad 100 \quad + \quad 45 \quad + \quad 60 \quad + \quad 20$

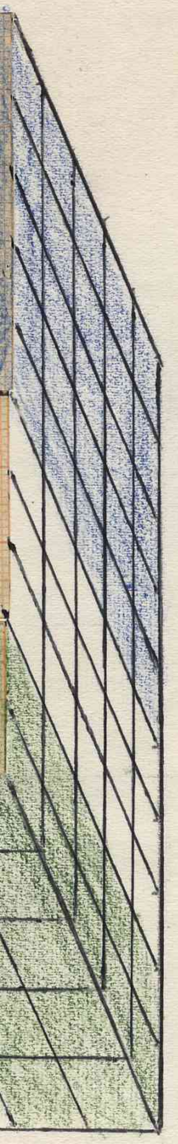
$\underline{500}$

+

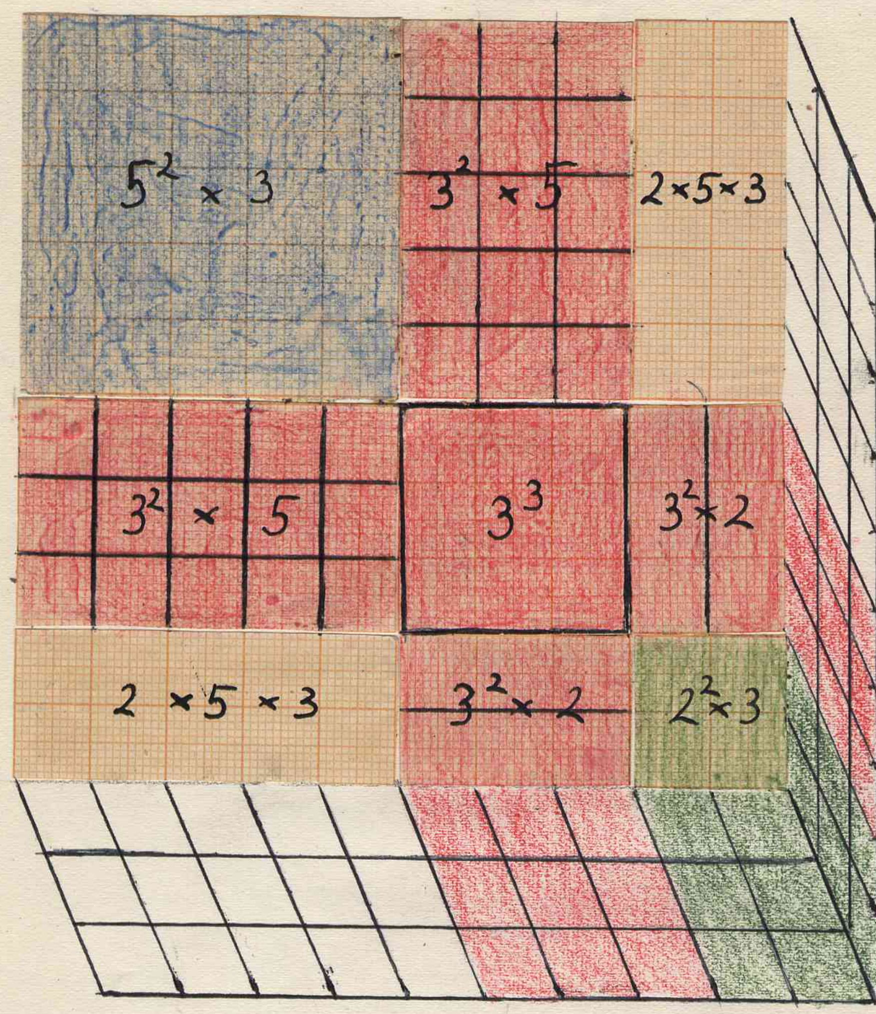
$5^3+3\times(5^2\times 3)$

ABB. 2

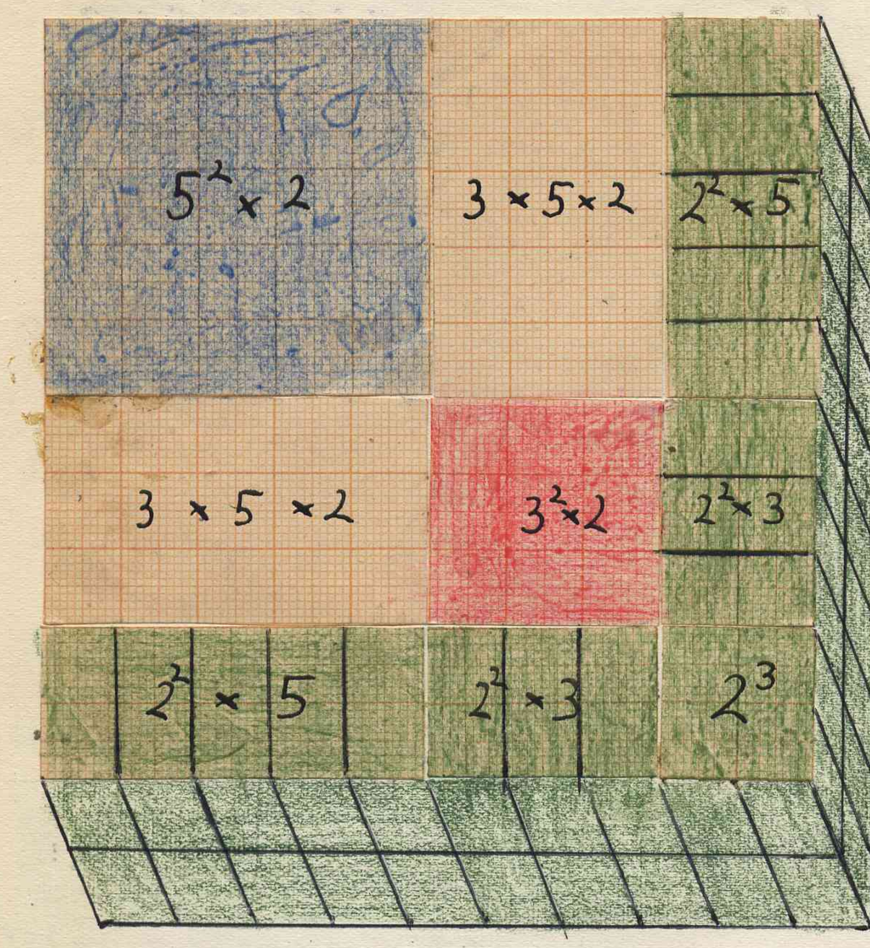
$$(5+3+2)^3 = 10^3$$



+



+



125
150
100
45
60
20
75
90
60
27
36
12
50
60
40
18
24
8

1000

10×10×10=1000

$$(3\times 2\times 5)+(2^2\times 5)$$
$$60 + 20$$

$$(5^2\times 3)+2\times(3^2\times 5)+2\times(2\times 5\times 3)+3^3+2\times(3^2\times 2)+(2^2\times 3)$$
$$75 + 90 + 60 + 27 + 36 + 12$$
$$\underline{300}$$

$$(5^2\times 2)+2\times(3\times 5\times 2)+2\times(2^2\times 5)+(3^2\times 2)+2\times(2^2\times 3)+2^3$$
$$50 + 60 + 40 + 18 + 24 + 8$$
$$\underline{200}$$

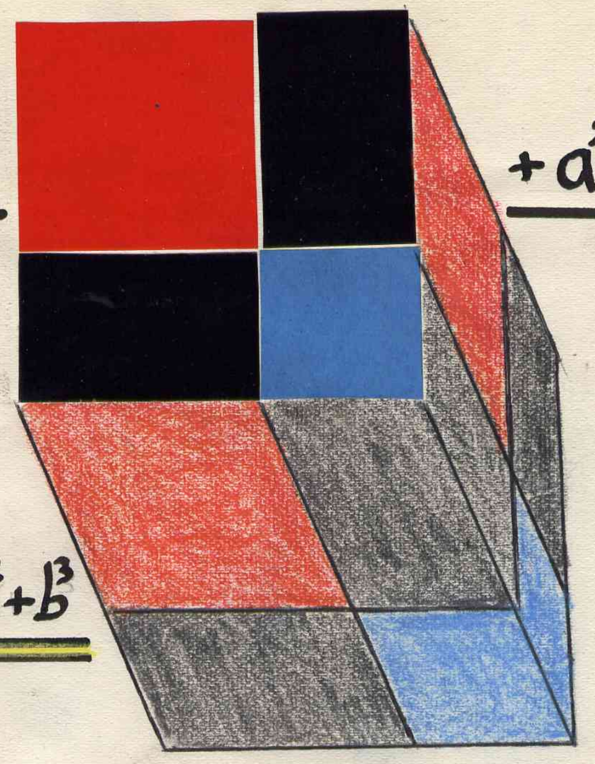
$$5^3+3\times(5^2\times 3)+3\times(3^2\times 5)+6\times(5\times 3\times 2)+3\times(2^2\times 5)+3^3+3\times(2^2\times 3)\times(3^2\times 2)+2^3$$

B

$(a+b)^3$

ABB. 1

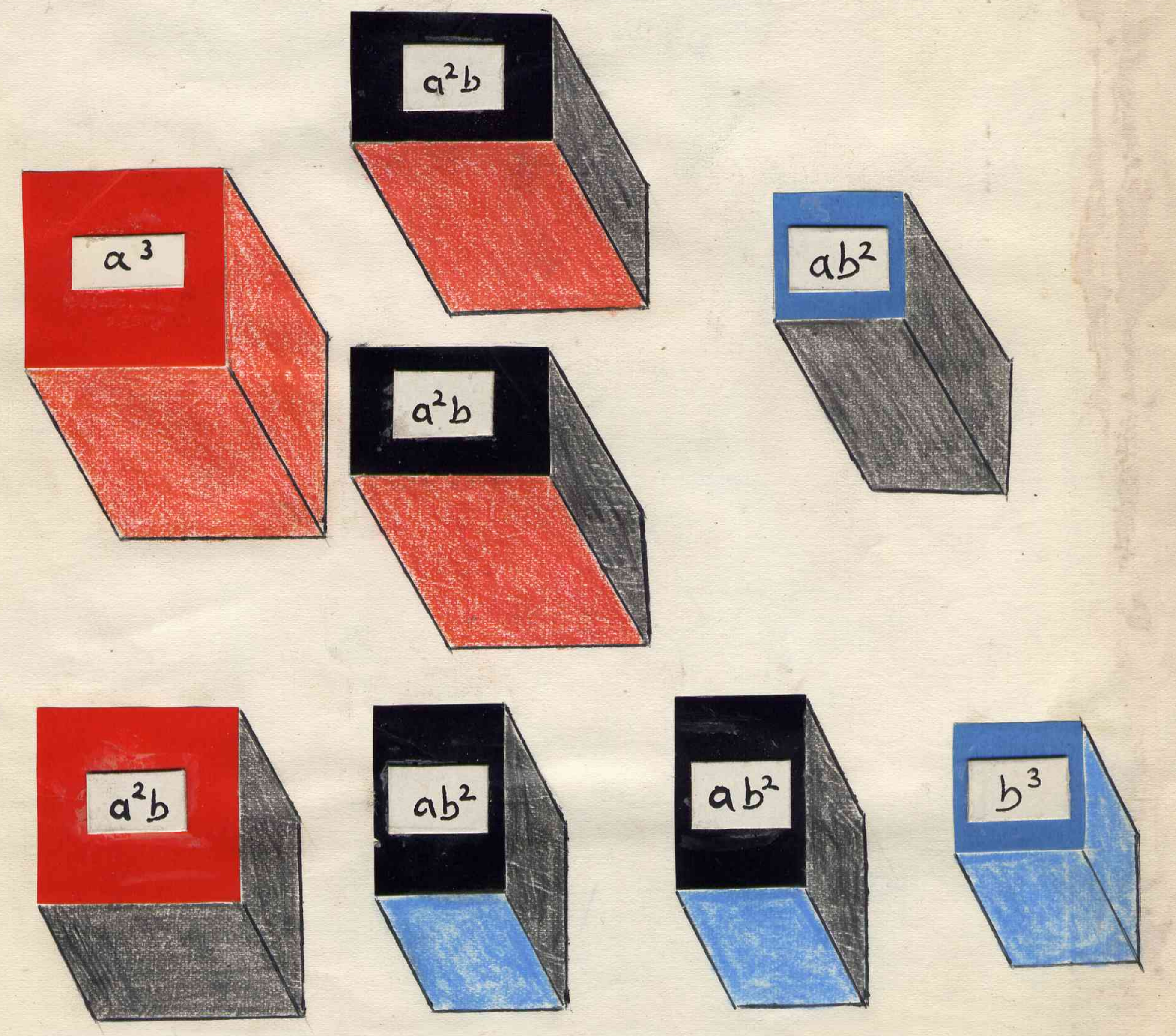
$a^3 + 2a^2b + ab^2$



$+a^2b + 2ab^2 + b^3$

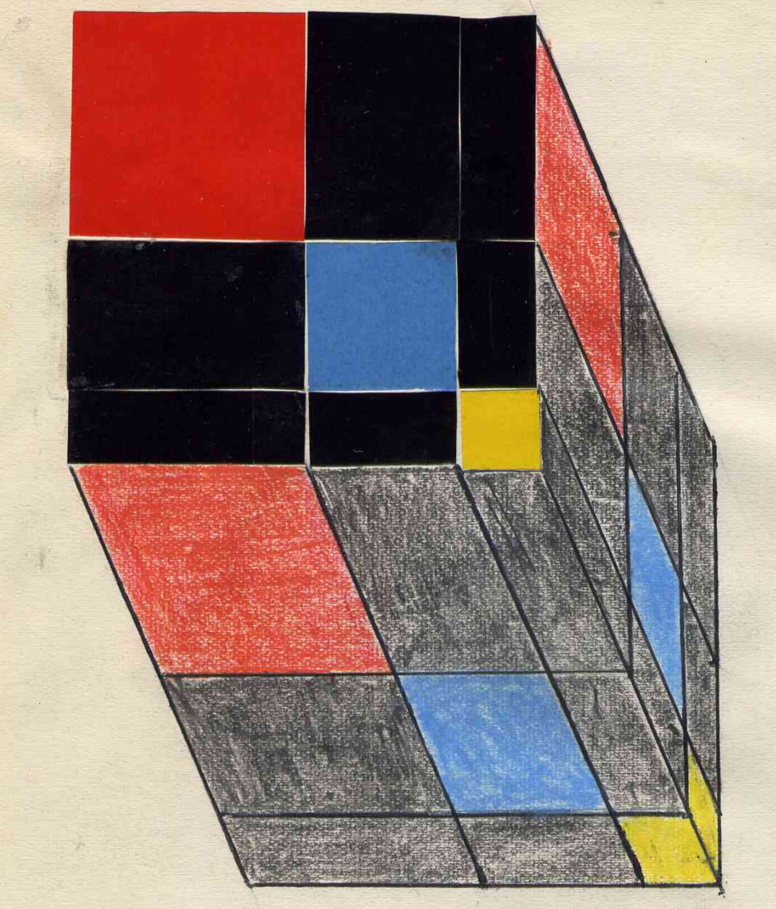
more simply expressed

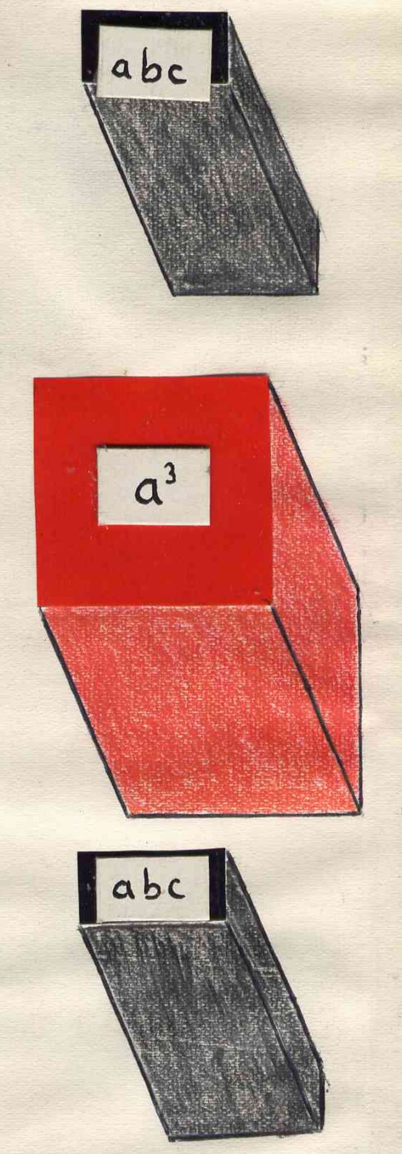
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



$(a+b+c)^3$

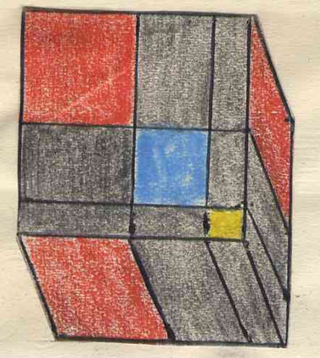
ABB.2



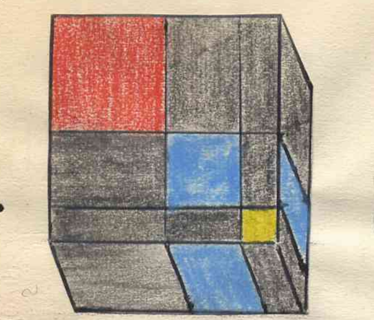


more simply expressed

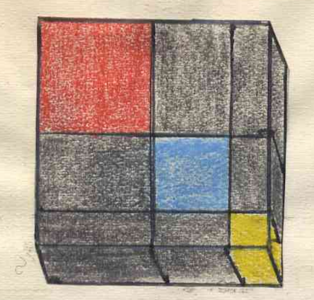
$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$



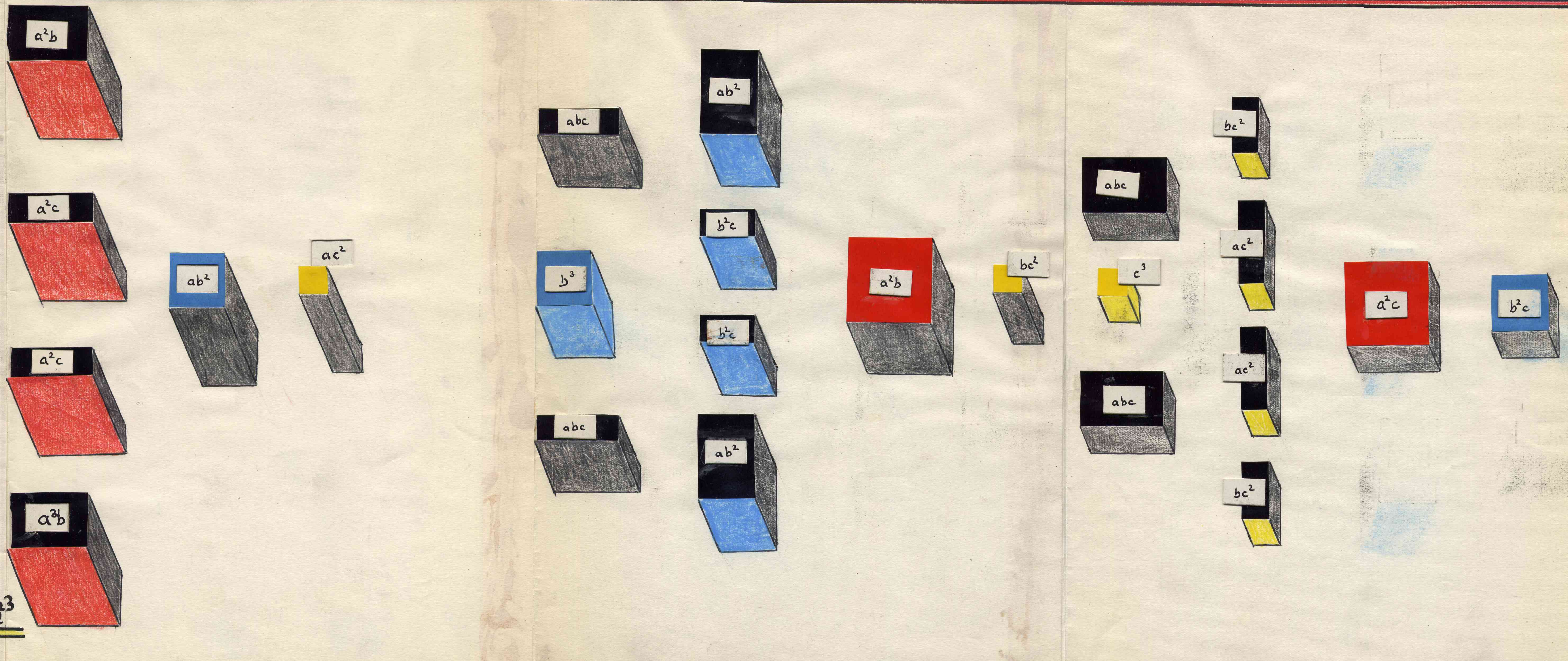
$a^3 + 2a^2b + 2a^2c + ab^2 + 2abc + ac^2 +$



$a^2b + 2ab^2 + 2abc + b^3 + 2b^2c + bc^2 +$



$a^2c + 2abc + 2ac^2 + b^2c + 2bc^2 + c^3$

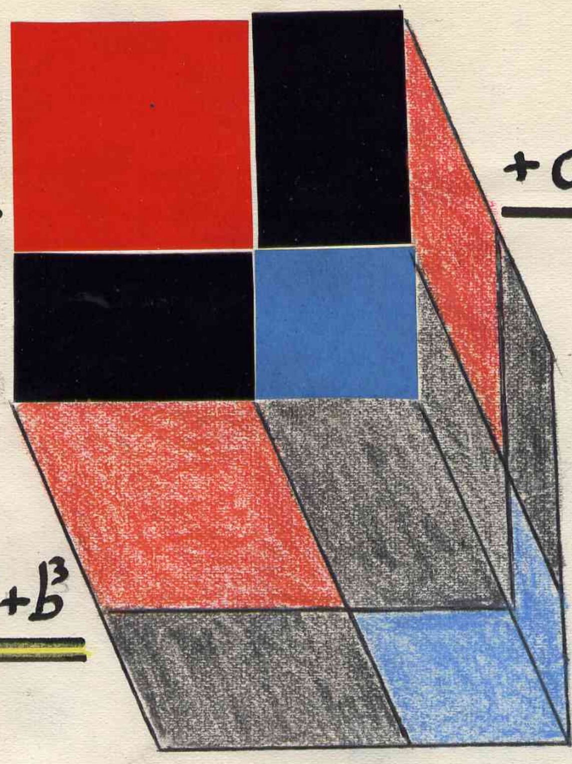


B

ABB. 1

$$(a+b)^3$$

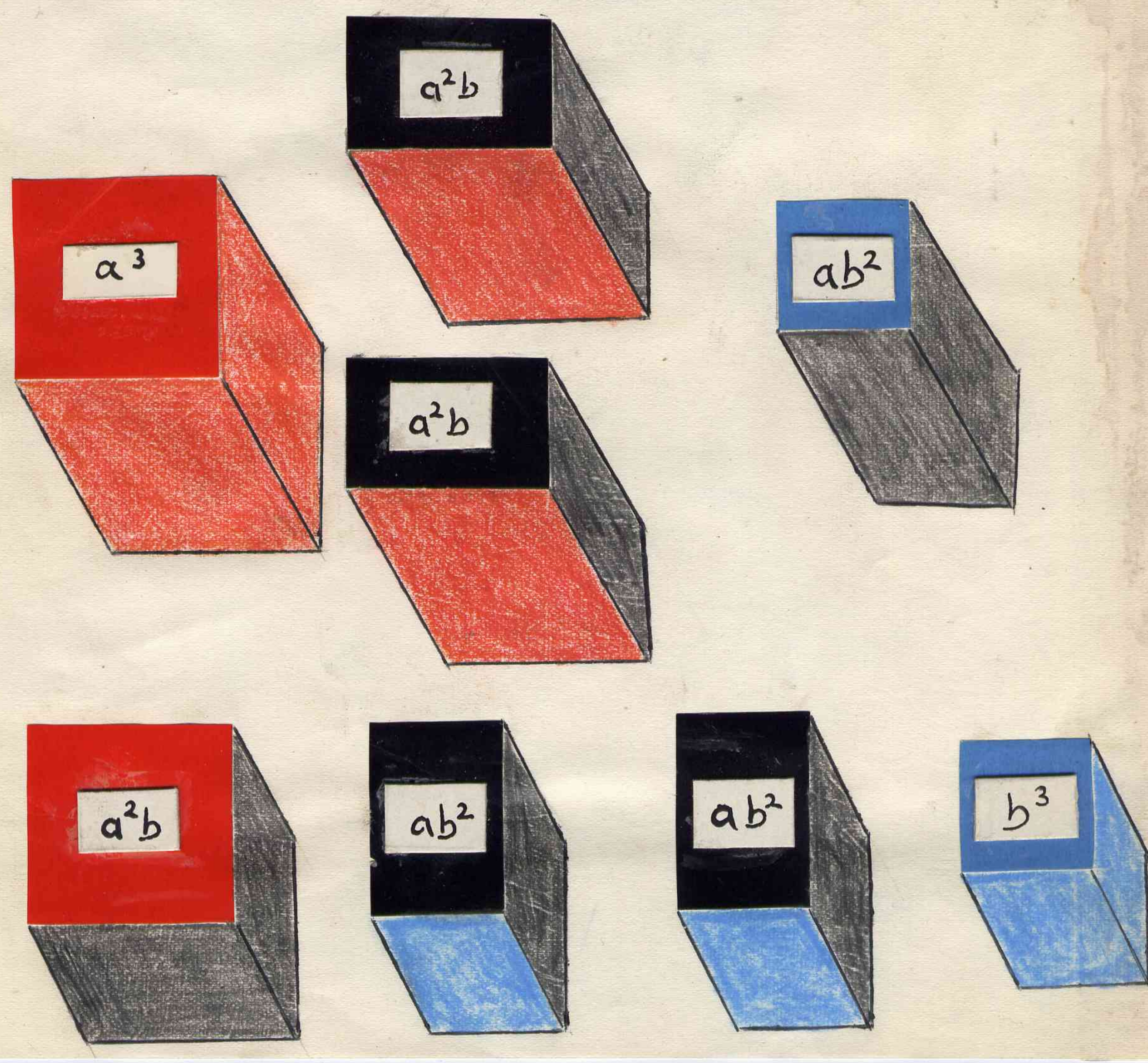
$a^3 + 2a^2b + ab^2$



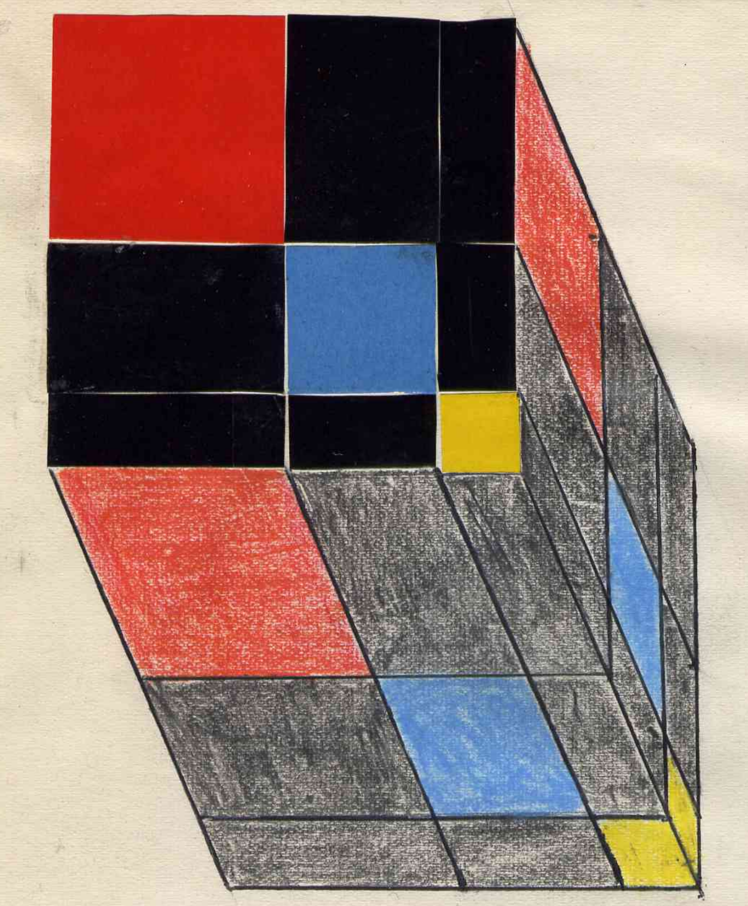
$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$

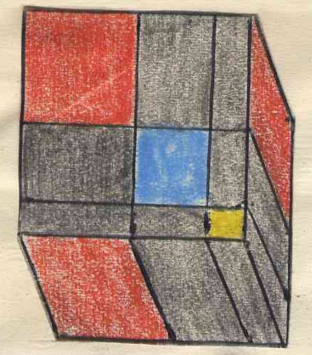
more simply expressed

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

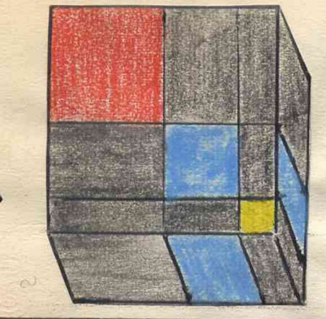


$(a+b+c)^3$ ABB.2



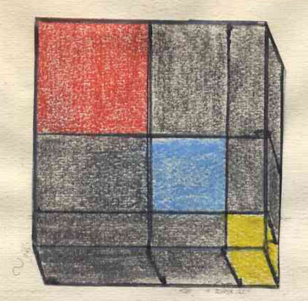


$a^3+2a^2b+2a^2c+ab^2+2abc+ac^2+$

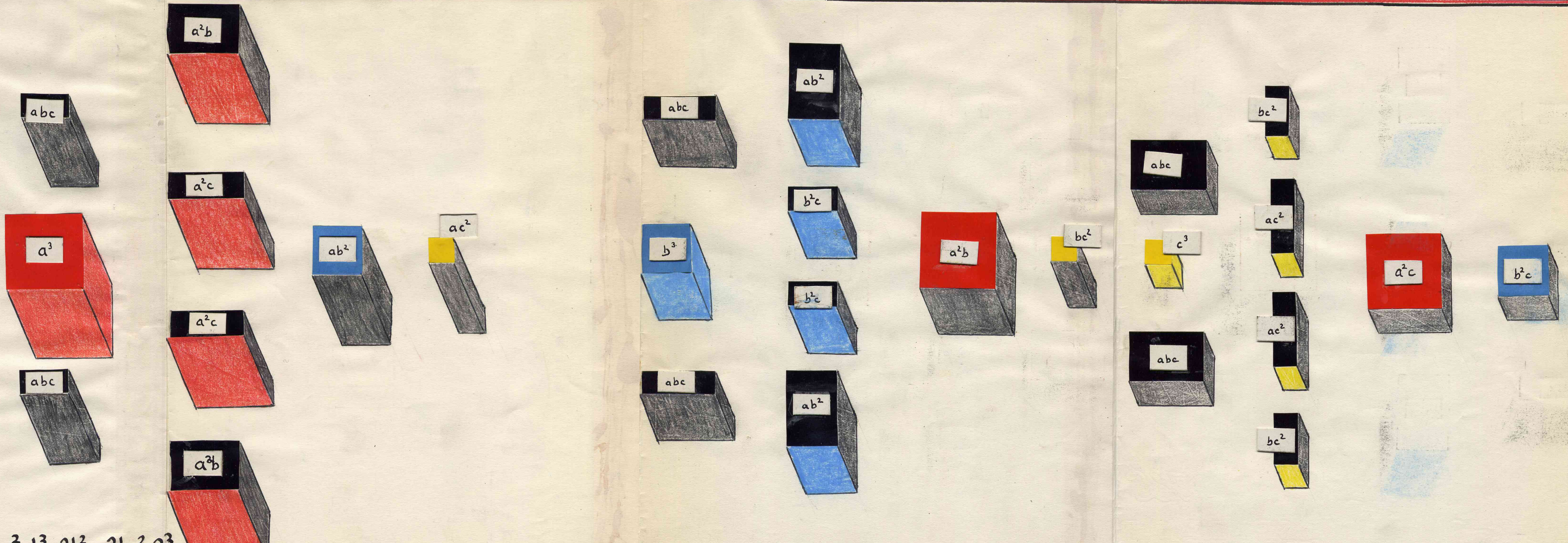


$a^2b+2ab^2+2abc+b^3+2b^2c+bc^2$

$+$



$a^2c+2abc+2ac^2+b^2c+2bc^2+c^3$



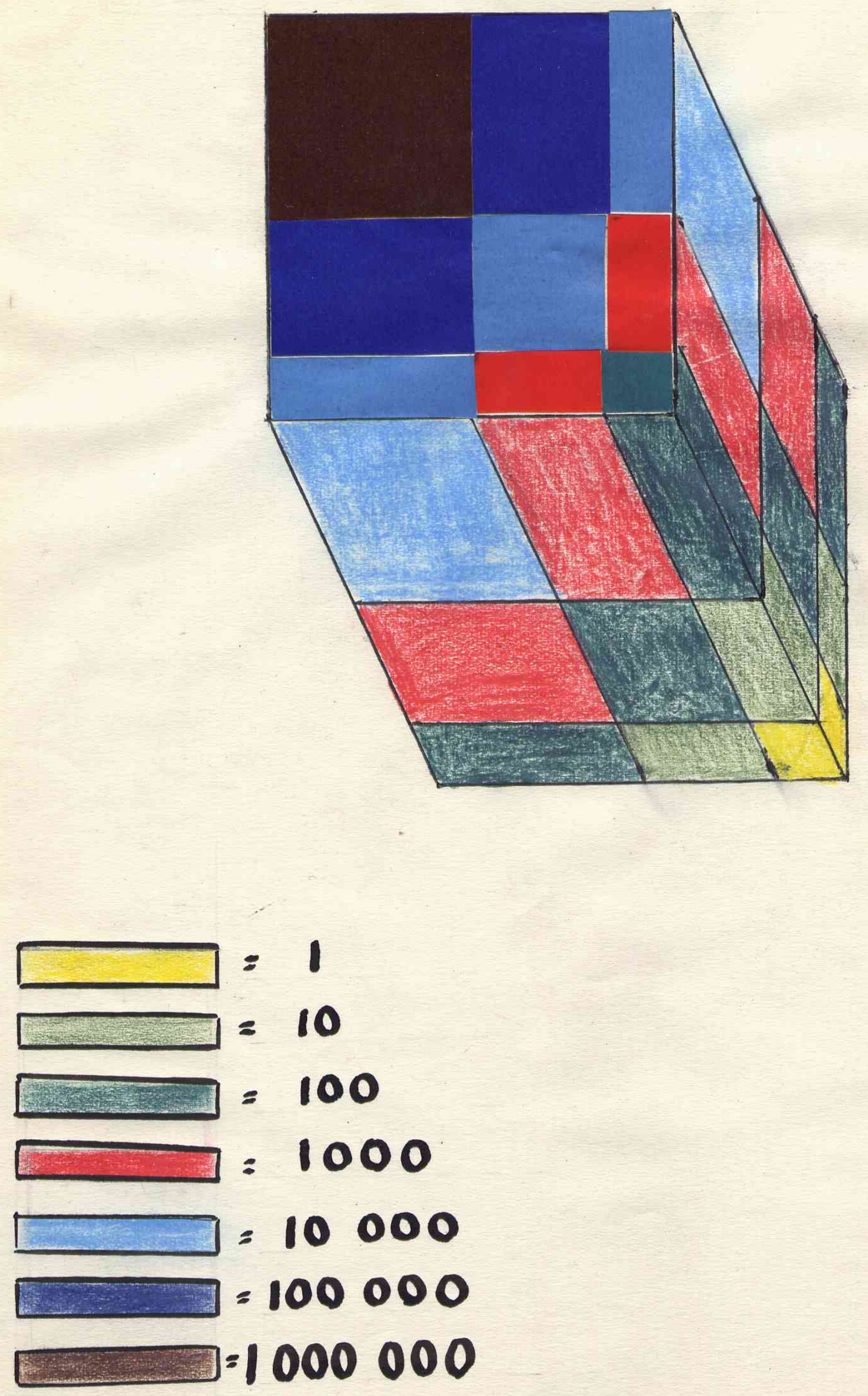
more simply expressed

$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

C

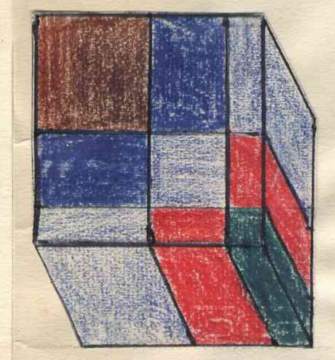
ABB. 1

$(h + t + u)^3$

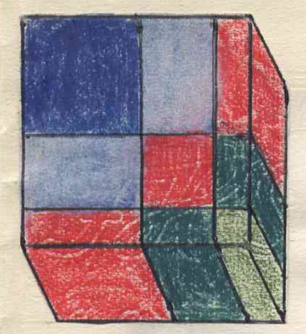


more simply expressed

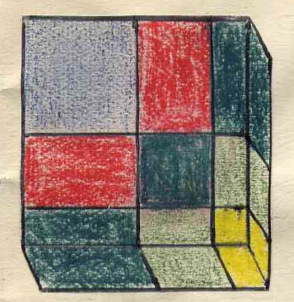
ABB. 2



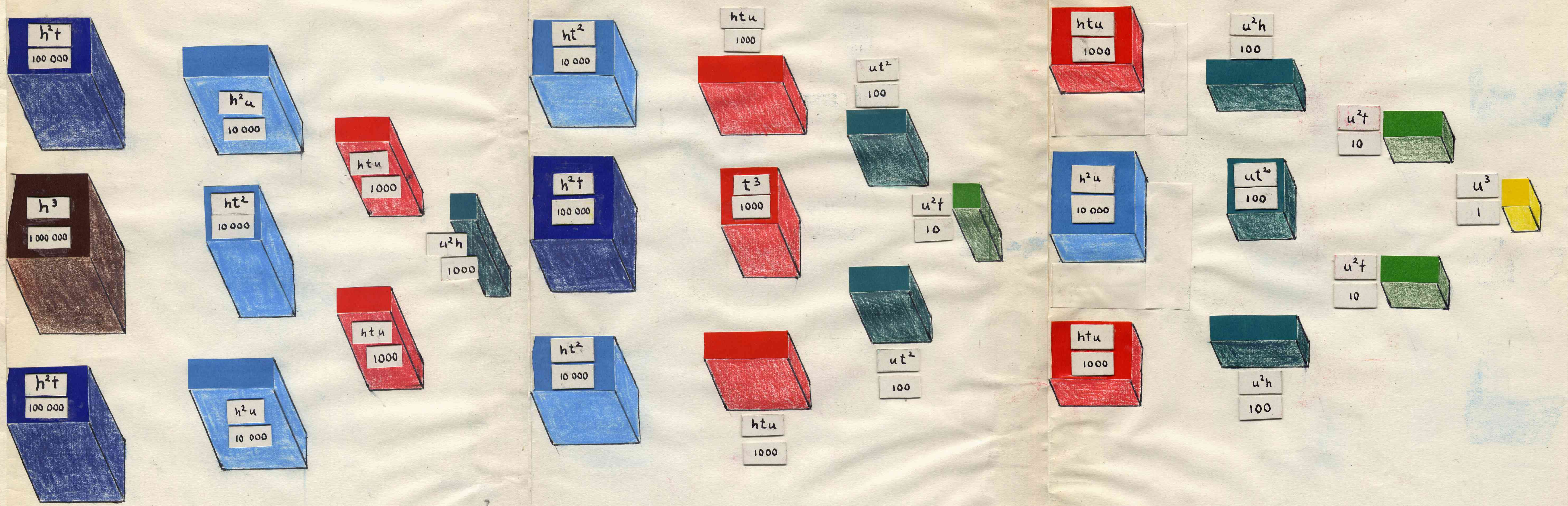
$h^3 + 2h^2t + 2h^2u + ht^2 + 2htu + u^2h \; +$



$h^2t + 2ht^2 + t^3 + 2htu + 2ut^2 + u^2t \; +$



$h^2u + 2htu + ut^2 + 2u^2h + 2u^2t + u^3$

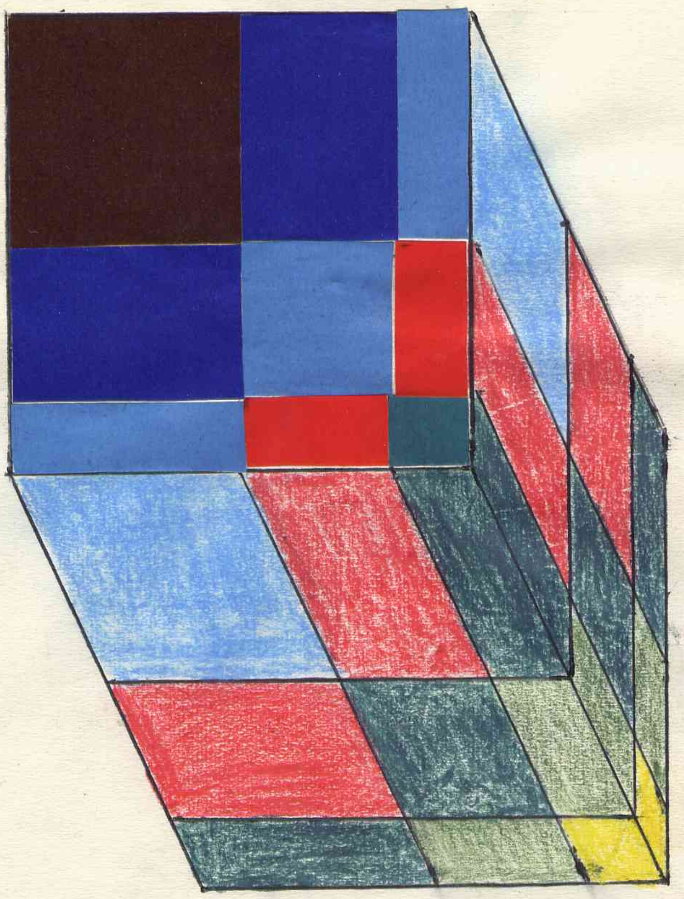


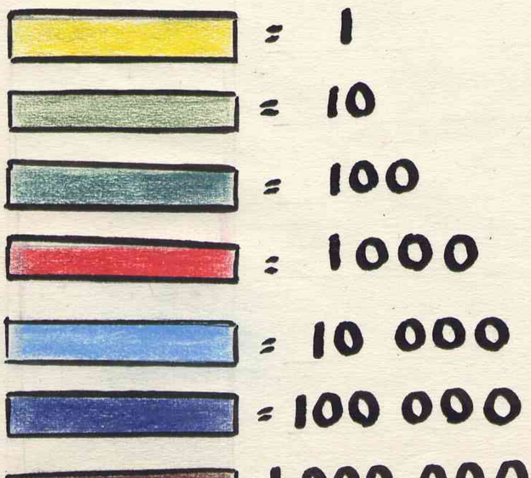
$h^3 + 3h^2t + 3h^2u + 3ht^2 + 6htu \;{}^{+t^3} + 3u^2h \;{}^{+ut^2} + 3u^2t + u^3$

C

ABB. 1

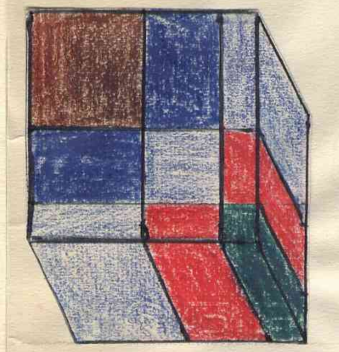
$$(h + t + u)^3$$



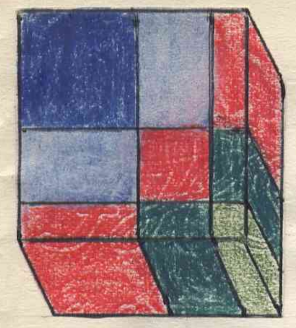


more simply expressed

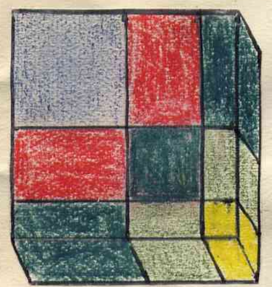
ABB. 2



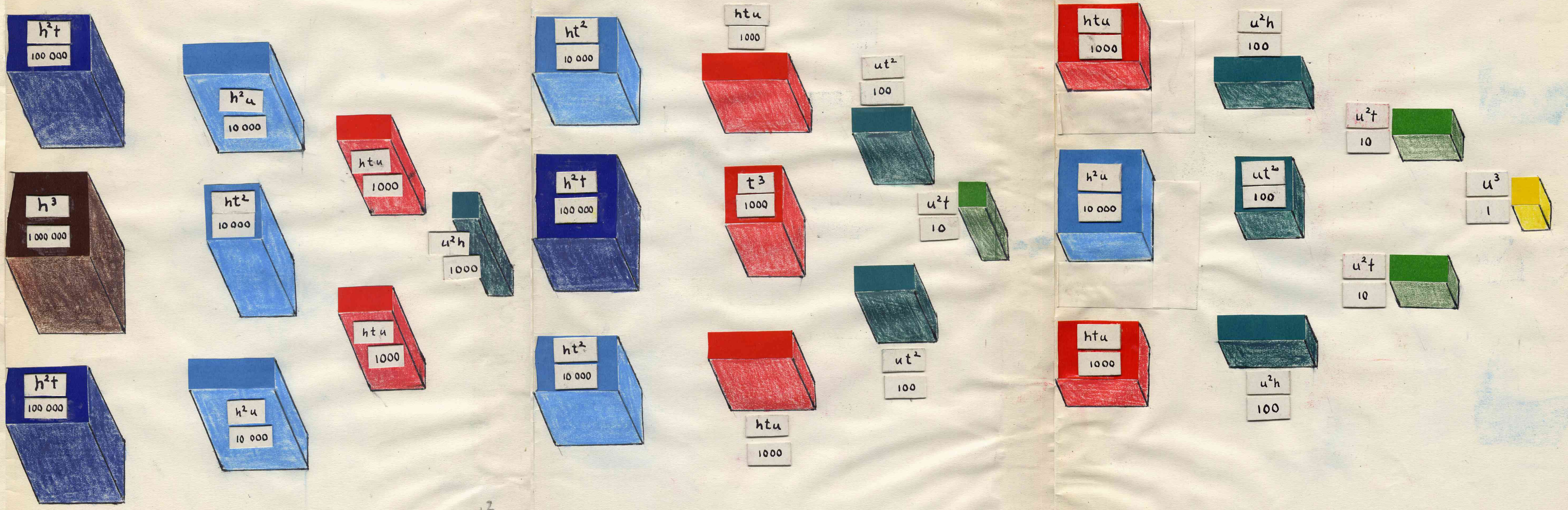
$h^3+2h^2t+2h^2u+ht^2+2htu+u^2h\;+$



$h^2t+2ht^2+t^3+2htu+2ut^2+u^2t\;+$



$h^2u+2htu+ut^2+2u^2h+2u^2t+u^3$



$h^3+3h^2t+3h^2u+3ht^2+6htu+t^3+3u^2h+ut^2+3u^2t+u^3$

Tafel mit Angabe von

Grundlinie, Quadrat, Würfel + 3x Quadr.

N	N^2	N^3	$3N^2$
1	1	1	3
2	4	8	12
3	9	27	27
4	16	64	48
5	25	125	75
6	36	216	108
7	49	343	147
8	64	512	192
9	81	729	243

Wurzel aus 150 568 768

Wir haben es mit einem Würfel aus 3 Zahlen zu tun.

Wir machen uns eine Liste mit den einzelnen Teilen:

h^3	=	Millionen	$= 5 \times 5 \times 5 = 125$
$3 \times h^2 t$	=	100 000	$= 5 \times 5 = 25 \times 3 = 75 \times 2$ $75 \times 3 = 225$
$3 \times h t^2$	=	10 000	$= 5 \times 3 \times 3 = 45 \times 3 = 135$
$3 \times h^2 u$	=	10 000	$= 5 \times 5 \times 3 = 75 \times ?$ $75 \times 2 = 150$
$6 \times htu$	=	1 000	$= 5 \times 3 \times 2 = 30 \times 6 = 180$
t^3	=	1 000	$= 3 \times 3 \times 3 = 27$
$3 \times ut^2$	=	100	$= 2 \times 3 \times 3 = 18 \times 3 = 54$
$3 \times u^2 h$	=	100	$= 2 \times 2 \times 5 = 20 \times 3 = 60$
$3 \times u^2 t$	=	10	$= 2 \times 2 \times 3 = 12 \times 3 = 36$
u^3	=	1	$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

$$\sqrt[]{150|568|768} = 532$$

```
 532
√150|568|768
 125
  255
  225
   3.06
   135
   171
   150
    218
    180
     38
     27
     117
      54
      63
      60
       36
       36
       08
        8
       00
```

$532 \times 532 \times 532 = 150\,568\,768$

Das ist die Probe

Wurzel aus 324 536

Wir haben es mit einem Würfel aus 2 Zahlen zu tun.

Wir machen uns eine Liste mit den einzelnen Teilen:

t^3	=	1000	$6 \times 6 \times 6 = 216$
$3 \times t^2 u$	=	100	$3 \times 6 \times 6 = 108 \times ?$ $108 \times 8 = 864$
$3 \times u^2 t$	=	10	$3 \times 8 \times 8 = 192 \times 6 = 1152$
u^3	=	1	$8 \times 8 \times 8 = 512$

```
 68
√324|536
 216
 108.5
  864
  221 3
  1152
 10616
   512
Rest: 10104
```

Probe

```
68 × 68 = 4624 × 68
          36992
         27744·
         314432
       + 10104
         324536
```

Die nächst größere Zahl 69 ist nicht möglich, da $69 \times 69 \times 69 = 326\,439$ ist.

Tafel mit Angabe von

Grundlinie, Quadrat, Würfel + 3x Quadr.

N	N^2	N^3	$3N^2$
1	1	1	3
2	4	8	12
3	9	27	27
4	16	64	48
5	25	125	75
6	36	216	108
7	49	343	147
8	64	512	192
9	81	729	243

Wurzel aus 150 568 768

Wir haben es mit einem Würfel aus 3 Zahlen zu tun.

Wir machen uns eine Liste
mit den einzelnen Teilen:

h^3	=	Millionen	$= 5 \times 5 \times 5 = 125$
$3 \times h^2t$	:	100 000	$= 5 \times 5 = 25 \times 3 = 75 \times 2$ $75 \times 3 = 225$
$3 \times ht^2$	:	10 000	$= 5 \times 3 \times 3 = 45 \times 3 = 135$
$3 \times h^2u$	:	10 000	$= 5 \times 5 \times 3 = 75 \times 2$ $75 \times 2 = 150$
$6 \times htu$	:	1 000	$= 5 \times 3 \times 2 = 30 \times 6 = 180$
t^3	:	1 000	$= 3 \times 3 \times 3 = 27$
$3 \times ut^2$	:	100	$= 2 \times 3 \times 3 = 18 \times 3 = 54$
$3 \times u^2h$	:	100	$= 2 \times 2 \times 5 = 20 \times 3 = 60$
$3 \times u^2t$	:	10	$= 2 \times 2 \times 3 = 12 \times 3 = 36$
u^3	:	1	$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

$$\sqrt{150|568|768} = 532$$

125
255
225
3.06
135
171
150
218
180
38
27
117
54
63
60
36
36
08
8
00

$$532 \times 532 \times 532 = 150\,568\,768$$

Das ist die Probe

Wurzel aus 324 536

Wir haben es mit einem Würfel aus 2 Zahlen zu tun.

Wir machen uns eine Liste mit den einzelnen Teilen:

t^3	=	1000	$6 \times 6 \times 6 = 216$
$3 \times t^2 u$	=	100	$3 \times 6 \times 6 = 108 \times ?$ $108 \times 8 = 864$
$3 \times u^2 t$	=	10	$3 \times 8 \times 8 = 192 \times 6 = 1152$
u^3	=	1	$8 \times 8 \times 8 = 512$

68

$\sqrt{324|536}$

```
  324|536
  216
  1085
   864
   2213
   1152
   10616
     512
Rest: 10104
```

Probe

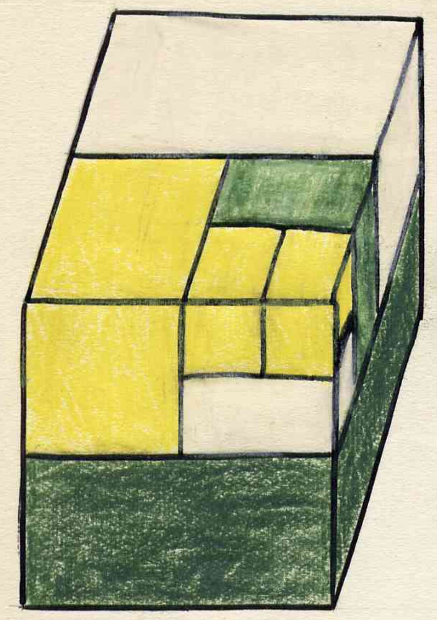
```
68 × 68 = 4624 × 68
           36992
          27744
          314432
  +        10104
          324536
```

Die nächst größere Zahl 69 ist nicht möglich, da $69 \times 69 \times 69 =$ 326 439 ist.

Darstellung der Potenzzahlen

von 1–9

für die Zahl 2



In gleicher Weise besteht Material für die Zahl " 3 " und im beschränktem Maße - von jeder geometrischen Form nur ein Beispiel - besteht es für die Zahl 10 d. h. für das Dezimalsystem. Für letzteres siehe Buch I .

Arbeit mit den Kindern: Wenn wir dieses Material einführen, hat das Kind mit dem Dezimalsystem schon seine ersten Erfahrungen mit dem Entstehen der Potenzen gesammelt. Gleichfalls kennt es die Quadrate und Würfel der Zahlen von 1 - 9.

Dieses Material ist lediglich eine Erweiterung in den Raum der höheren Potenzen. Es zeigt die Wiederholung der geometrischen Formen, die im Material noch durch das Gleichbleiben der Farbe unterstrichen wird.

Wir bauen mit dem Kind den 2er Würfel bis zu seiner 9. Potenz auf. Anschließend geben wir die vorbereiteten Karten dazu, die die verschiedenen Schreibweisen zur Benennung der einzelnen Potenzen tragen.

Anschließend daran geben wir dem Kind einen Satz mit Multiplikations- und einen mit Divisionsaufgaben. Multiplikation sowie Division ist mit dem Material nur mit den Faktoren der einzelnen Potenzen möglich. Aus diesem Grunde fallen Subtraktion und Addition als Übungsmöglichkeiten aus.

Durch Erfahrung lernt das Kind, daß bei der Division die Potenzzahlen voneinander abgezogen und bei der Multiplikation einanderzugezählt werden. - Parallellaufend oder hinterher kann das Kind die Operationen mit konkreten Zahlen durchführen.

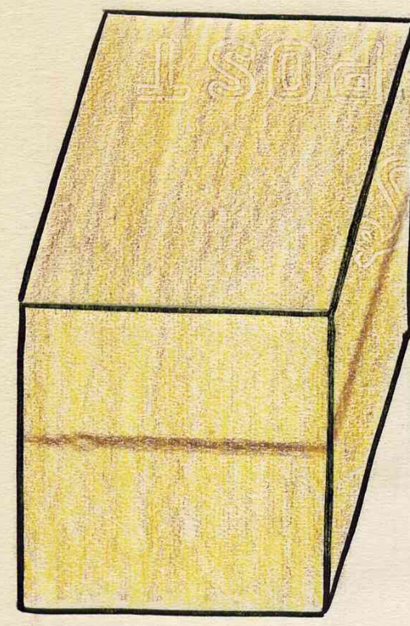
Das Wiederkehren bestimmter Zahlkombinationen und ihr Verhältnis untereinander wird erfahren.

2	=	2
4	=	2^2
8	=	2^3
16	=	2^4
32	=	2^5
64	=	2^6
128	=	2^7
256	=	2^8
512	=	2^9

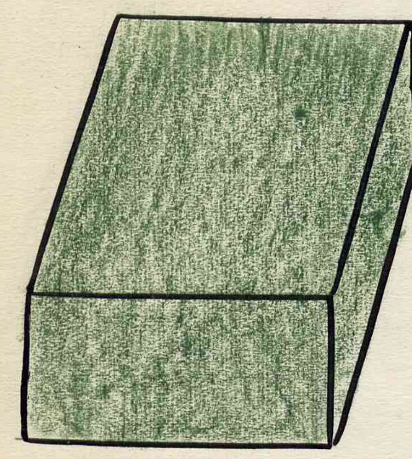
Es bestehen zwei verschiedene Ausdrucksmöglichkeiten:

z. Beispiel:

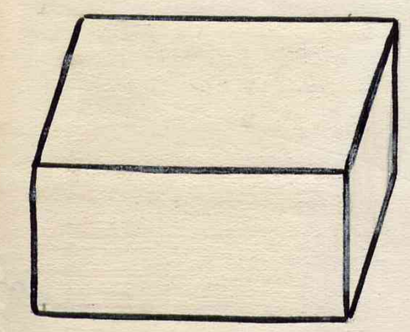
$16 : 2 = 8$	$16 \times 2 = 32$
oder $2^4 : 2 = 2^3$	$2^4 \times 2 = 2^5$
$128 : 16 = 8$	$128 \times 4 = 512$
" $2^7 : 2^4 = 2^3$	$2^7 \times 2^2 = 2^9$
$512 : 32 = 16$	$32 \times 8 = 256$
" $2^9 : 2^5 = 2^4$	$2^5 \times 2^3 = 2^8$



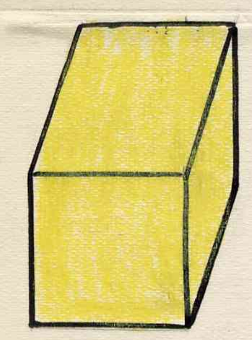
$\boxed{2^8 \times 9}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^9}$



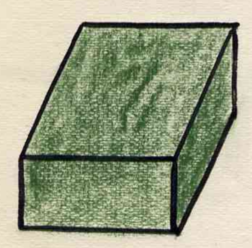
$\boxed{2^7 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^8}$



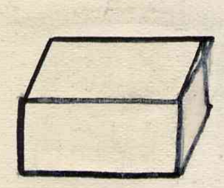
$\boxed{2^6 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^7}$



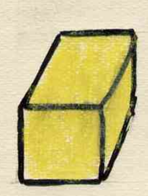
$\boxed{2^5 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^6}$



$\boxed{2^4 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^5}$

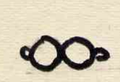


$\boxed{2^3 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^4}$



$\boxed{2^2 \times 2}$ $\boxed{2 \times 2 \times 2}$ $\boxed{(2 \times 2) \times 2}$ $\boxed{2^3}$

$\boxed{2 \times 2}$ $\boxed{2^2}$

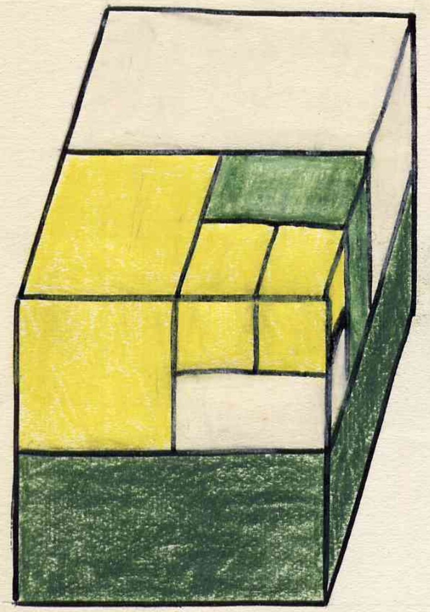


$\boxed{2}$

Division
$2^9 : 2$
$2^8 : 2$
$2^7 : 2$
$2^6 : 2$
$2^5 : 2$
$2^4 : 2$
$2^3 : 2$
$2^2 : 2$
$2^8 : 4$ or 2^4
$2^8 : 8$ or 2^3
$2^8 : 32$ or 2^5
$2^8 : 64$ or 2^6
$2^8 : 128$ or 2[illegible]

Multiplikation
$2^3 \times 2^3$
$2^3 \times 2^4$
$2^3 \times 2^5$
$2^3 \times 2^6$
$2^4 \times 2^3$
$2^4 \times 2^5$
$2^4 \times 2^4$
$2^5 \times 2^4$
$2^5 \times 2^3$
$2^6 \times 2^3$
$2^7 \times 2^2$
$2^6 \times 2^2$
$2^4 \times 2^2$

Darstellung der Potenzzahlen



von 1 - 9

für die Zahl 2

In gleicher Weise besteht Material für die Zahl " 3 " und im beschränktem Maße - von jeder geometrischen Form nur ein Beispiel - besteht es für die Zahl 10 d. h. für das Dezimalsystem. Für letzteres siehe Buch I .

Arbeit mit den Kindern: Wenn wir dieses Material einführen, hat das Kind mit dem Dezimalsystem schon seine ersten Erfahrungen mit dem Entstehen der Potenzen gesammelt. Gleichfalls kennt es die Quadrate und Würfel der Zahlen von 1 - 9.

Dieses Material ist lediglich eine Erweiterung in den Raum der höheren Potenzen. Es zeigt die Wiederholung der geometrischen Formen, die im Material noch durch das Gleichbleiben der Farbe unterstrichen wird.

Wir bauen mit dem Kind den 2er Würfel bis zu seiner 9. Potenz auf. Anschließend geben wir die vorbereiteten Karten dazu, die die verschiedenen Schreibweisen zur Benennung der einzelnen Potenzen tragen.

Anschließend daran geben wir dem Kind einen Satz mit Multiplikations- und einen mit Divisionsaufgaben. Multiplikation sowie Division ist mit dem Material nur mit den Faktoren der einzelnen Potenzen möglich. Aus diesem Grunde fallen Subtraktion und Addition als Übungsmöglichkeiten aus.

Durch Erfahrung lernt das Kind, daß bei der Division die Potenzzahlen voneinander abgezogen und bei der Multiplikation einanderzugezählt werden. - Parallellaufend oder hinterher kann das Kind die Operationen mit konkreten Zahlen durchführen.

und mit ihnen Operieren.

Das Wiederkehren bestimmter Zahlkombinationen und ihr Verhältnis untereinander wird erfahren.

2	=	2
4	=	2^2
8	=	2^3
16	=	2^4
32	=	2^5
64	=	2^6
128	=	2^7
256	=	2^8
512	=	2^9

Es bestehen zwei verschiedene Ausdrucks= möglichkeiten:

z. Beispiel:

$16 : 2 = 8$ $\qquad$ $16 \times 2 = 32$

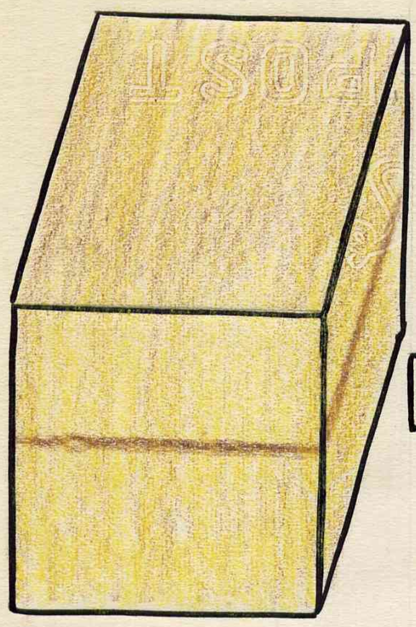
oder $2^4 : 2 = 2^3$ $\qquad$ $2^4 \times 2 = 2^5$

$128 : 16 = 8$ $\qquad$ $128 \times 4 = 512$

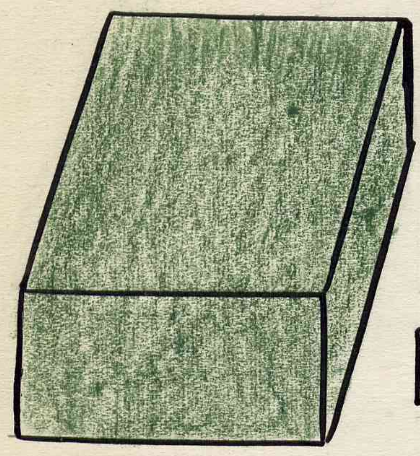
" $2^7 : 2^4 = 2^3$ $\qquad$ $2^7 \times 2^2 = 2^9$

$512 : 32 = 16$ $\qquad$ $32 \times 8 = 256$

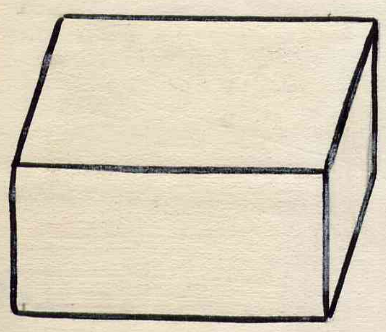
" $2^9 : 2^5 = 2^4$ $\qquad$ $2^5 \times 2^3 = 2^8$



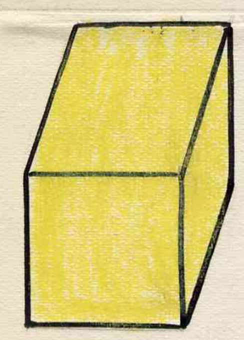
$2^8 \times 9$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^9



$2^7 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^8

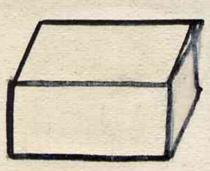


$2^6 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^7

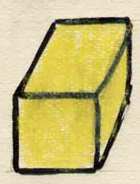


$2^5 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^6

$2^4 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^5

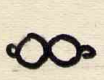


$2^3 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2 \times 2) \times 2$ | 2^4



$2^2 \times 2$ | $2 \times 2 \times 2$ | $(2 \times 2) \times 2$ | 2^3

2×2 | 2^2



2

Division

Division
$2^9 : 2$
$2^8 : 2$
$2^7 : 2$
$2^6 : 2$
$2^5 : 2$
$2^4 : 2$
$2^3 : 2$
$2^2 : 2$
$2^8 : 4$ or 2^4
$2^8 : 8$ or 2^3
$2^8 : 32$ or 2^5
$2^8 : 64$ or 2^6
$2^8 : 128$ or 2[illegible]

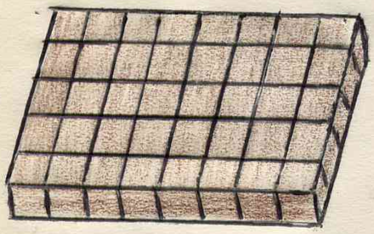
Multiplikation

Multiplikation
$2^3 \times 2^3$
$2^3 \times 2^4$
$2^3 \times 2^5$
$2^3 \times 2^6$
$2^4 \times 2^3$
$2^4 \times 2^5$
$2^4 \times 2^4$
$2^5 \times 2^4$
$2^5 \times 2^3$
$2^6 \times 2^3$
$2^7 \times 2^2$
$2^6 \times 2^2$
$2^4 \times 2^2$

Über das Messen von Körpern

Bei aller Körperberechnung, welche Maßeinheit wir auch immer benutzen, finden wir die Form des Würfels als kleinste Einheit.

Wir haben entsprechendes Material zum Experimentieren. Es besteht aus kleinen Würfeln, die zu verschiedenen rechteckigen Prismen aufgebaut werden können.



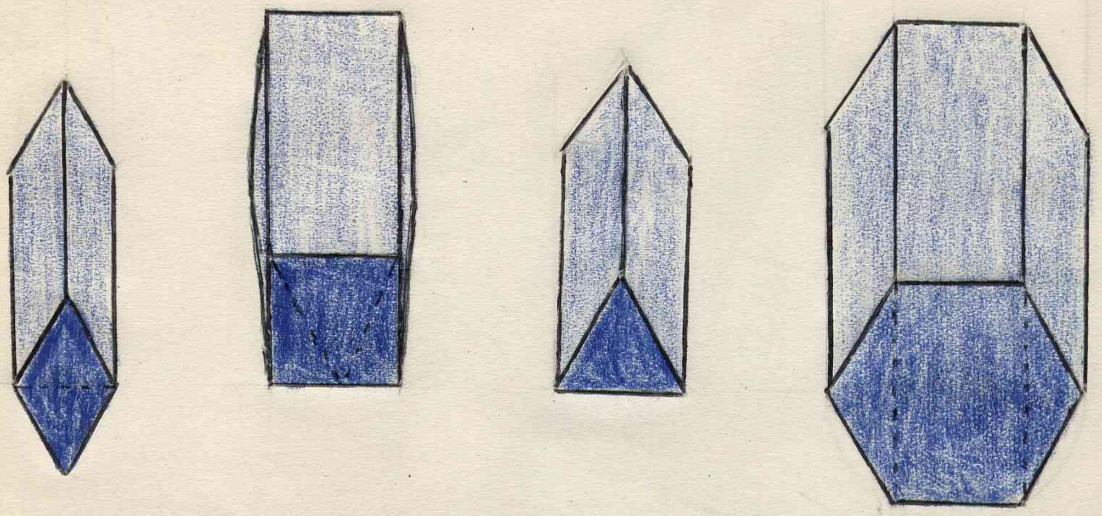
$5 \times 8 \times 1 = 40$

Diese 40 Würfel können wir auch anders ordnen.

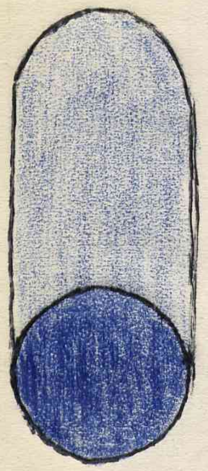
$4 \times 2 \times 5 = 40$

Nachdem viele solcher verschiedenen Anordnungen ausprobiert sind, kommen wir zu der Regel: L × B × H = Länge × Breite × Höhe führt zur Errechnung regelmäßiger Körper.

Die verschiedenen Prismenformen



Grundfläche × Höhe, so heißt die abgeleitete Formel



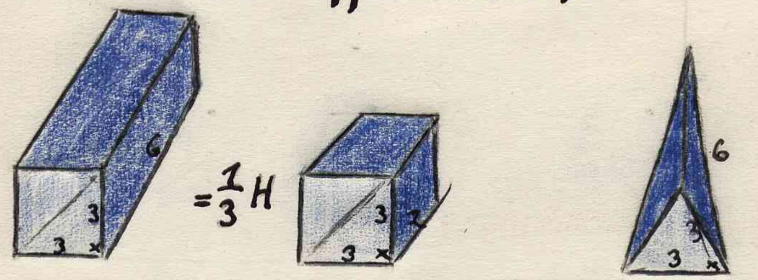
Für die Berechnung des Zylinders gilt das Gleiche

Material: Die oben angeführten Prismen können auseinander genommen und in ihrem Wert verglichen werden.

Die Pyramide

Wir haben besonderes Material mit dem die Formel für die Berechnung gefun= den werden kann.

Es besteht aus drei hohlen Körpern, die auf einer Seite offen sind.



2 vierkantige Prismen + 1 Pyramide, deren Höhe mit der Höhe des gr. vierkantigen Prismas übereinstimmt.

Das große, vierkantige Prisma wird mit Hilfe des kleinen Prismas mit Sand gefüllt. Dazu muß das kleine Prisma 3x gefüllt wer= den, da die Höhe ja nur $\frac{1}{3}$ des großen Prismas beträgt. Nun füllen wir die Pyramide mit Hilfe des kleinen Prismas. Das kleine Prisma braucht dazu nur 1x gefüllt zu werden. Daraus kann die Regel abgeleitet werden:

Grundfläche × $\frac{1}{3}$ Höhe.

Das Gleiche gilt für den spitzen Zylinder

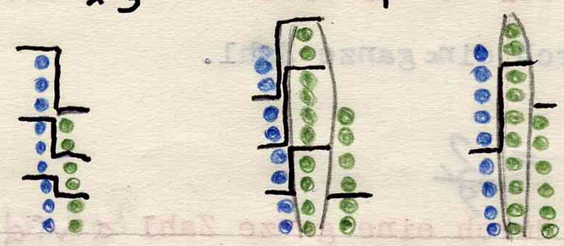
25. Vortrag am 11. 12. 57 von Mario Montessori

Einführung in die Bruchrechnung

Wiederholung des Findens des LCM auf dem Peggoty Board in erweiterter Form, d. h. mit zwei oder dreistelligen Zahlen.

Beispiel:

$$32 \times 3 = 24 \times 4 = 48 \times 2 = 96$$



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$
$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$$
$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$$

Rule: Allergleichen Grundfaktoren + alle ungleichen Grundfaktoren mit der höchsten Potenz werden miteinder multipliziert.

Wenn wir die Bruchrechnung einführen wollen, so ist es am besten wenn wir den Kreis wählen, weil hier die einzelnen Bruchteile immer ihre gleiche Form behalten.

Was ist ein richtiger Bruch? Etwas, das gebrochen ist. Man kann ein Ganzes in beliebig viele Teile brechen.

Wir zeigen den Kindern die Schreibweise.

$\frac{}{4}$ Unterhalb des Striches schreiben wir den Familiennamen. = Viertel

$\frac{3}{4}$ Oberhalb des Striches geben wir die Anzahl der Familienmitglieder an, die anwesend sind.
Drei von den Vierteln sind anwesend

Die Kinder ordnen die entsprechenden vorbereiteten Karten zu den einzelnen Bruchteilen.
Einfache Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsaufgaben können ausgeführt werden.
Beispiel:

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5}{9} \quad ; \quad \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

Wenn die Kinder mit diesen Operationen vertraut sind, geben wir den Kindern die Regel.

Um zwei Brüche mit dem gleichen Nenner zu addieren, brauchen nur die verschiedenen Zähler addiert zu werden.

Um zwei Brüche mit dem gleichen Nenner zu subtrahieren, brauchen nur die verschiedenen Zähler voneinander abgezogen werden.

Wir multiplizieren mit einer ganzen Zahl.
Beispiel:

$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{6}{9}$$

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert wird, so wird nur der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. Der Nenner bleibt unverändert.

Wir dividieren durch eine ganze Zahl.
Beispiel:

$$\frac{6}{9} : 3 = \frac{2}{9}$$

Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, so wird nur der Zäler durch die ganze Zahl geteilt. Der Nenner bleibt unverändert.

Das Verwandeln von Brüchen wird geübt.
Wenn die Kinder das mit dem Material genügend lange getan haben, führen wir die Kinder zur Regel, um den erfolgten Prozeß, der beim Auswechseln geschieht, zu klären.
Beispiele:

$$\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \qquad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \qquad \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \qquad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Regel: Wenn der Zähler die Hälfte des Nenners ausmacht, so haben wir es immer mit 1/2 zu tun.

Wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl malgenommen werden, so verändert sich der Wert des Bruches nicht.

Beispiel:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Wenn wir Brüche mit verschiedenen Nennern addieren, subtrahieren, ~~multiplizieren oder divi dieren~~ wollen, so müssen die verschiedenen Brüche zuerst alle auf einen Nenner gebracht werden.
Man kann nicht Kühe und Schafe zusammenzählen. Wohl aber kann man die Würste, die aus Kuh- und Schaffleisch hergestellt sind, zusammenzählen.

Wir haben in der vorherigen Arbeit erfahren, daß der Wert eines Bruches sich nicht ändert, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl malgenommen werden.
Wenn wir also folgende Zahlen addieren wollen, müssen wir jeden Bruch mit der Zahl malnehmen, die uns zum gleichen Nenner führt.

Fortsetzung des 25. Vortrages

Beispiel:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\left(\frac{1\times 4}{2\times 4}\right)=\frac{4}{8}+\left(\frac{1\times 2}{4\times 2}\right)=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\left(\frac{1\times 4}{2\times 4}\right)=\frac{4}{8}-\left(\frac{1\times 2}{4\times 2}\right)=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

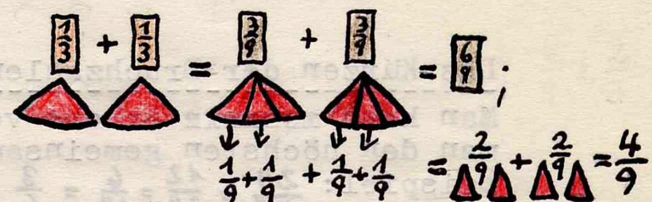
Wenn man Zähler mit verschiedenen Nennern addieren oder subtrahieren will, so muß man zuerst alle Zähler auf einen Nenner bringen. Die Zähler und Nenner müs=sen jeweils mit der Zahl malgenommen werden, die am Ende zum gleichen Nenner führt.

Wenn Brüche mit Brüchen malgenommen werden, so heißt das in Wirklichkeit, daß der Bruch immer kleiner gemacht wird. Es heißt: Nimm weg!

Beispiel:

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

take $\frac{2}{3}$ of $\frac{2}{3}$



Wenn man einen Bruch mit einem Bruch multiplizieren will, so muß man die Zähler unter sich und die Nenner unter sich multiplizieren.

Diese Regeln werden immer erst gegeben, wenn die Kinder lange praktische Erfahrungen gesammelt haben.

Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl teilen will und der Zähler läßt sich nicht teilen, so muß man den Bruch so=lange erweitern, bis er sich durch die ganze Zahl teilen läßt.

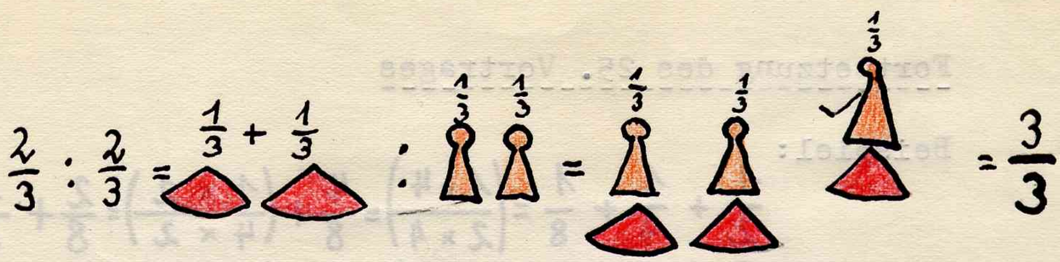
Beispiel: $\frac{1}{4}:2=\frac{2}{8}:2=\frac{1}{8}$; $\frac{5}{3}:2=\frac{10}{6}:2=\frac{5}{6}$; $\frac{5}{3}:2=\frac{5}{3\times 2}=\frac{5}{6}$

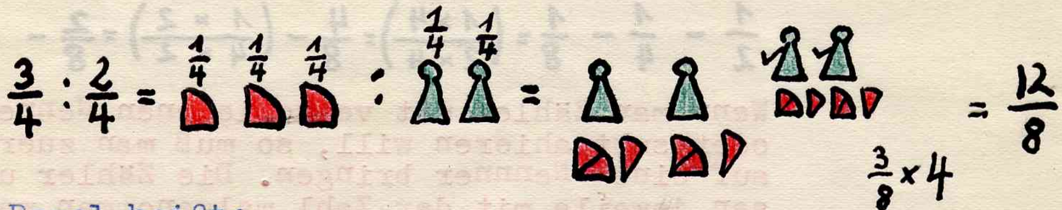
Die vereinfachte Regel heißt deshalb:

Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu teilen, muß man den Nenner mit der ganzen Zahl malnehmen.

Beispiel: $\frac{1}{2}:4=\frac{1}{2\times 4}=\frac{1}{8}$; $\frac{3}{2}:4=\frac{3}{8}$

Wenn ein Bruch durch einen Bruch geteilt wird, so heißt das, daß wir den Bruch zunächst durch den Zähler teilen und dann das Resultat, das ein Bruchteil erhält, mit dem Nenner multi=plizieren. Das Resultat besteht nicht aus der Anzahl, die die anwesenden Bruchteile erhalten, sondern aus der Anzahl, die die ganze Zahl erhält.





Die Regel heißt:

Wenn man zwei Brüche miteinander dividiert, so wird der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multipliziert. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{2} = \frac{12}{8}$
(Dividend="Das zu Verteilende" - Divisor="Die Zahl, die in einer andern enthalten ist")

Das Kürzen der Bruchzahlen:

Man kann ~~mehrere~~ Brüche vereinfachen oder kürzen indem man den höchsten gemeinsamen Faktor findet.

Beispiel: $\frac{24}{48} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{24}{48} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{2^3 \times 3 = 24}{2^4 \times 3 = 48}$

Wir finden den höchsten gemeinsamen Faktor nach der Regel, daß alle gleichen Grundfaktoren mit der niedrigsten Potenz malgenommen werden.
In unserm Falle heißt das $2^3 \times 3 = 24$
24 ist der höchste gemeinsame Faktor.
24 : 48 = $\frac{1}{2}$
Zu dem selben Ergebnis gelangen wir durch einfaches Kürzen das heißt durch Cancellation.

$$\frac{24}{48} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}} = \frac{1}{2}$$

Das Erweitern der Bruchzahlen:

Wir erweitern mehrere Brüche, um den niedrigsten gemeinsamen Nenner zu finden.

Wir finden den niedrigsten gemeinsamen Nenner nach der Regel, daß alle gleichen und ungleichen Grundfaktoren mit der höchsten Potenz malgenommen werden.

$$\frac{8}{48} + \frac{9}{32} + \frac{10}{24} = \frac{(8 \cdot 2)16 + (9 \cdot 3)27 + (4 \cdot 10)40}{96} = \frac{83}{96}$$

	48		32		24
2	24	2	16	2	12
2	12	2	8	2	16
2	6	2	4	2	3
2	3	2	2	3	1
3	1	2	1		

$= 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

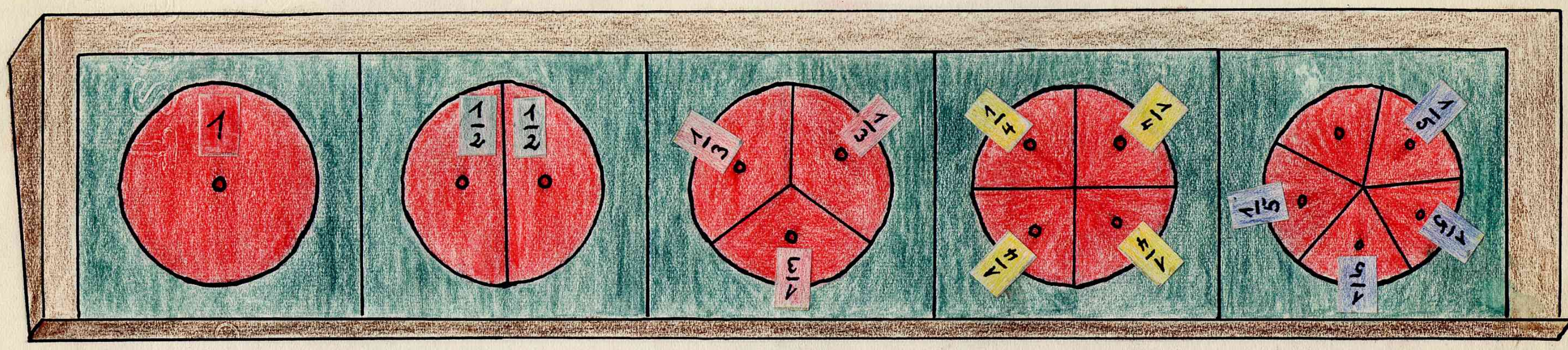
$= 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

$= 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

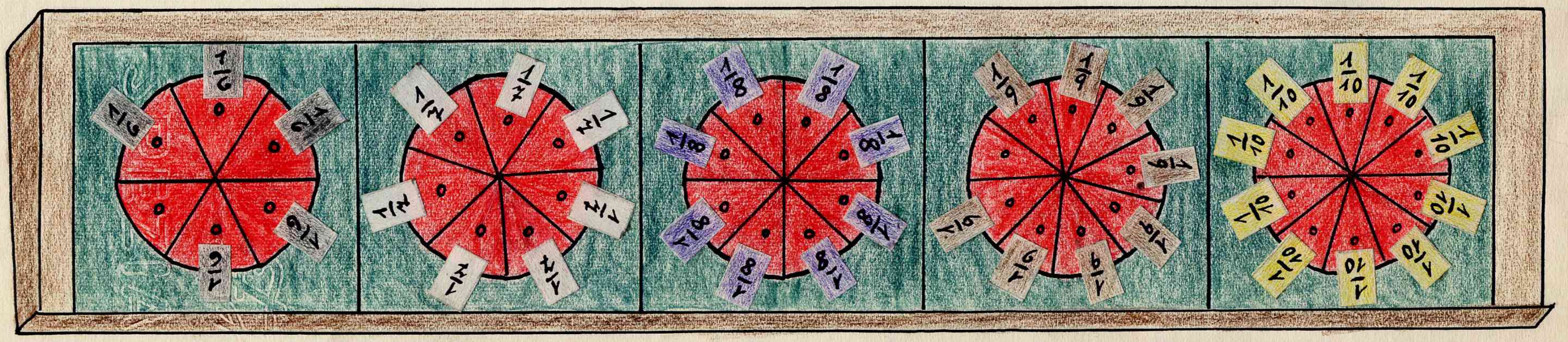
$2^5 \times 3 = 96$ = der niedrigste gemeinsame Nenner (L.C.M)

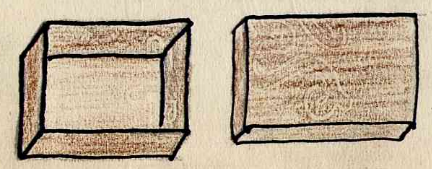
Die nicht allen gemeinsamen Faktoren geben die entsprechenden Multiplikationszahlen an.

Fractions of a Circle with the Family Names



After the introduction of the writing of fraction numbers the child distributes the different fraction numbers to their appropriate places.





The colour of the fraction numbers corresponds to the colours of the bead-stairs. Each fraction number is present only so many times that it can form a whole.

Examples for work with fractions see apparatus-book of fractions

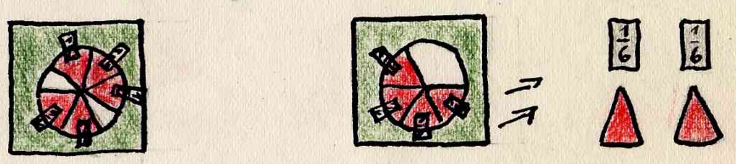
This is a compromised summary.

Before any arithmetic with fractions is done the child has had experience with "artistic geometry" by drawing

The child takes out the fractions and places them in an empty frame when doing the first exercises.

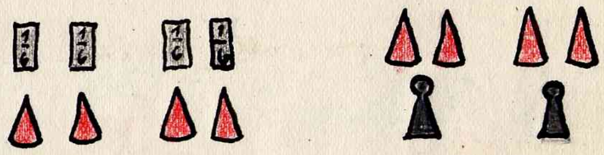
1. Addition and Subtraction of the same family.

$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ $\frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$



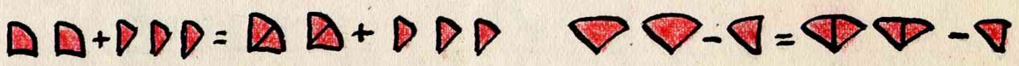
2. Multiplication and Division with whole numbers.

$\frac{2}{6} \times 2 = \frac{4}{6}$ $\frac{4}{6} : 2 = \frac{2}{6}$



3. Addition and Subtraction of mixed families.

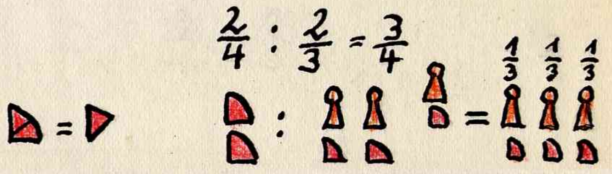
$\frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

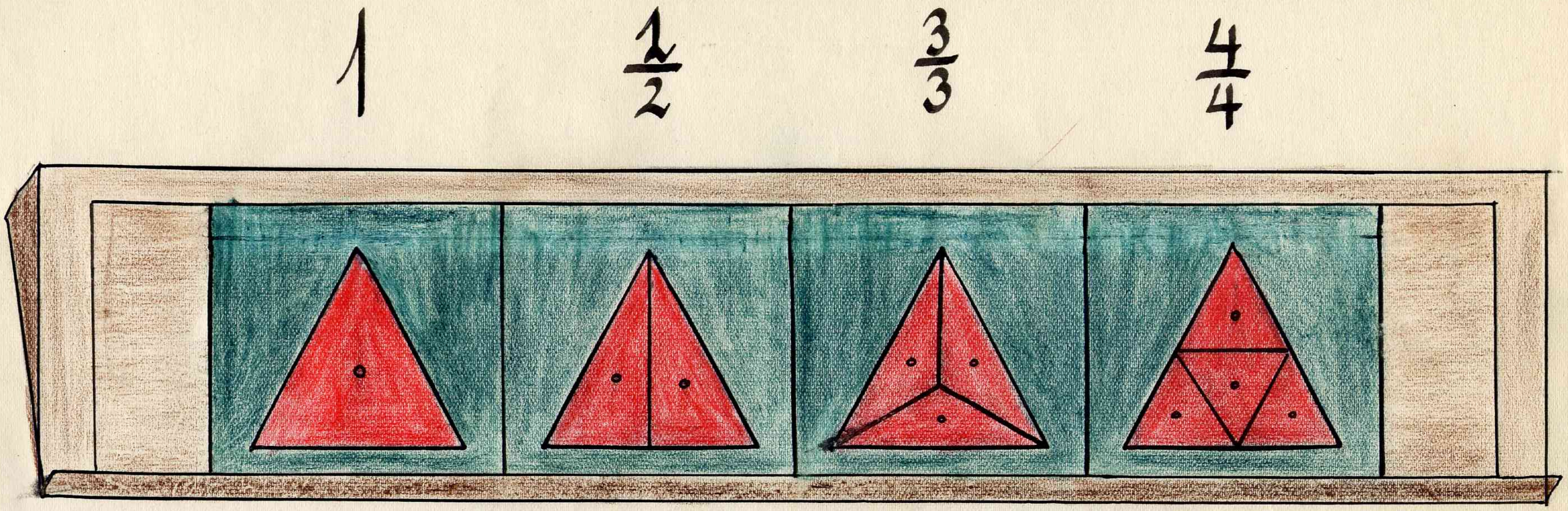


4. Multiplication and Devision of fractions with fractions.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\frac{2}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

take $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$

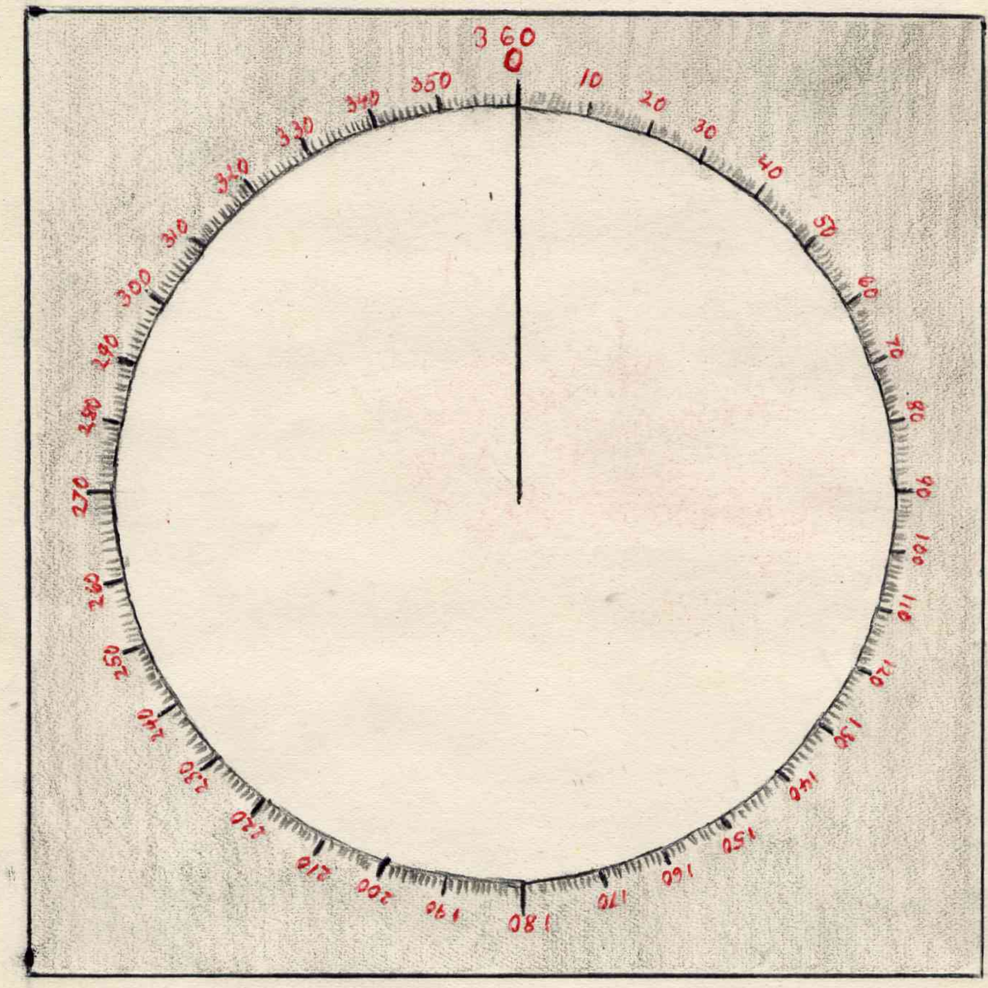




Fractions of a Triangle

Fractions of Square see Apparatusbook 1

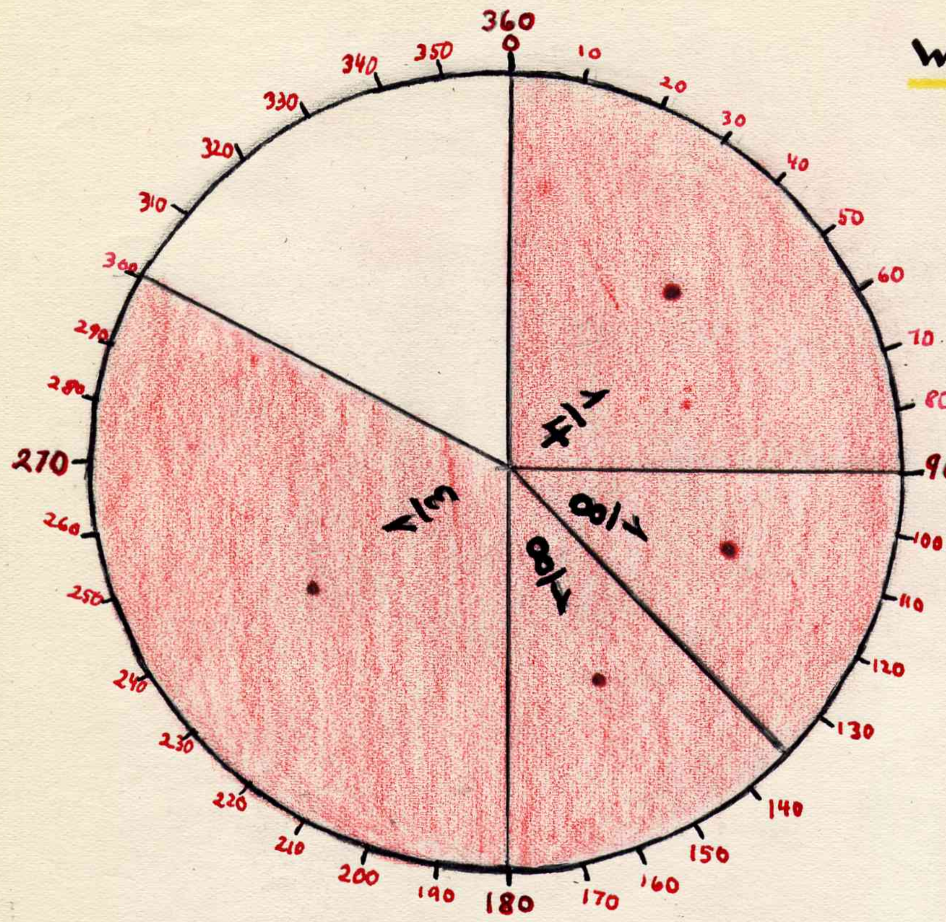
Instrument um Brüche zu messen



eingeteilt in 360°

Die Kinder können die verschiedenen Teile der geometrischen Figuren an den Kreismes= ser anlegen und die Gradzahl der einzel= nen Winkel Ablesen.

Kleine Rechenaufgaben können ausgeführt werden



Addition

$\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{1}{3} =$

$90° + 90° + 120° = 300°$

Subtraktion

$\frac{1}{2} - \frac{2}{8} =$

$180° - 90° = 90°$

Multiplikation + Division

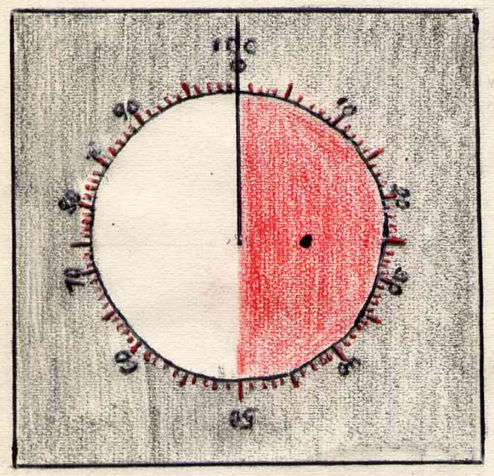
$5 \times \frac{1}{6} =$

$5 \times 60° = 300°$

$\frac{3}{4} : 3 =$

$270° : 3 = 90°$

Allgemeine Brüche werden in Dezimalbrüche umgewandelt.



Der Kreismesser ist in hundert Teile eingeteilt.

Die einzelnen Bruchteile werden in den Kreismesser an die Nullinie gelegt und am Rand kann der Dezimalbruch abgelesen werden.

Genau errechnete Brüche

$\frac{1}{2} : \frac{50}{100}$ — $50 \times 2 = 100 =$ 1 Ganzes

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ — $25 \times 4 = 100 =$ "

$\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ — $20 \times 5 = 100 =$ "

Ungenau errechnete Brüche

$\frac{1}{3} = \frac{33}{100}$ — $33 \times 3 = 99 =$ beinahe 100

$\frac{1}{6} = \frac{17}{100}$ — $17 \times 6 = 102 =$ etwas über 100

$\frac{1}{9} = \frac{11}{100}$ — $11 \times 9 = 99 =$ beinahe 100

Kleine Rechenaufgaben können ausgeführt werden

1\. Schritt: Umwandlung eines allgemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch

Beispiel: $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

2\. Schritt: Addition beginnend mit exaktem Resultat.

Beispiel: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{100} + \frac{50}{100} = \frac{75}{100}$

3\. Schritt: Subtraktion beginnend mit exaktem Resultat.

Beispiel: $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{50}{100} - \frac{10}{100} = \frac{40}{100}$

4\. Schritt: Multiplikation und Division

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times \frac{1}{8} = 3 \times \frac{12}{100} = \frac{36}{100} \\ \frac{1}{2} : 4 = \frac{50}{100} : 4 = \frac{12}{100} \end{array}\right\} \text{ungefähr}$$

Die Kinder üben sich im Umwandeln. Sie erleben was 100stel und 10tel sind und sind damit vorbereitet auf die Einführung des Dezimalbruchmaterials.

Umwandlung allgemeiner Brüche in Dezimalbrüche.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$$

20
20

$$\frac{6}{10} = 6 : 10 = 0{,}6$$

60
60

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$$

30
28
20
20

$$\frac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875$$

70
64
60
56
40
40

$$\frac{5}{9} = 5 : 9 = 0{,}55\ldots$$

50
45
50
50
5

Der Dezimalbruch kann mit einer, zwei oder drei Stellen hinter dem Komma ausgedrückt werden ein genaues Resultat darstellend. Es gibt aber auch Fälle, in denen eine unendliche Bruchzahl erscheint entweder als einzelne Zahl oder als Periode.

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0{,}4285714$$

30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
10
7
30
28
2 . . . . .

27. Vortrag am 16. 12. 57 gehalten von Mario Montessori

Einführung in die "Negativen Zahlen"

Minuend = Zahl, die um eine andere zu verringerm ist.
Subtrahend = Zahl, um die eine andere verringert ist.

Wenn man negative Zahlen zusammen zählt, so erhält man weniger, als man vorher hatte.
Wenn man positive Zahlen addiert, so erhält man mehr.

Beschreibung der negativen Schlange (siehe 1. Materialb.)

Beschreibung der verschiedenen Schritte bei der Arbeit mit der negativen Schlange.

1. Schritt: Eine Schlange mit gemischten Zahlen - negativ und positiv - wird ausgelegt. Das Resultat soll positiv ausfallen. Das Kind zählt vor und zurück. Bei der Kontrolle müssen sich die negativen und positiven Perlen aufheben. Auf dem Tisch bleibt das Resultat liegen.

2. Schritt: Das Reultat soll Null ergeben.

3. Schritt: Das Reultat soll negativ ausfallen.

4. Schritt: Es wird nicht vor und zurück gezählt, sondern die positiven Perlen und die negativen Perlen werden jede in eine Schlange für sich gelegt und dann voneinander abgezogen, indem die gleichen Zehnerstäbe negativ und positiv sich gegenseitig aufheben. Der Rest ist das negative Ergebnis.

5. Schritt: Eine positiv- negativ Schlange wird ausgelegt. Dann werden die gleichen Zahlen untereinander gelegt und so weit es geht gegenseitig aufgehoben. Nur noch eine kleine Addition braucht ausgeführt zu werden.

6. Schritt: Wir zeigen den Kindern die Schreibweise mit den Klammern. Gerechnet wird jedoch mit der gleichfalls ausgelegten Schlange.

Wenn man eine negative Zahl abzieht, so ist das Ergebnis positiv. Diese Tatsache können wir den Kindern an einer kleinen Operation zeigen.

Wir haben eine Reihe von Zahlen ausgelegt. Es sind negative und positive, jedoch ist keine negative 7 dabei. Wir bitten nun das Kind, daß es uns eine nagtive 7 gibt. Da keine vorhandenist, legen wir eine positive und eine negative 7 (was ja nichts anderes als 0 bedeutet) dazu. Jetzt kann das Kind die negative 7 uns geben. Die positive 7 dagegen bleibt liegen.

Eine klare Vorstellung der Vorgänge ist notwendig und diese kann nur durch konkrete Wahrnehmung und Erfahrung erlangt werden.

Das Kind erfährt durch die Übungen mit der negativen und positiven Schlange, daß:

$(-7)+(-7)=-14$ Addition zweier negativer Zahlen ein negatives Ergebnis ergibt.

$(+7)+(+7)=+14$ Addition zweier positiver Zahlen ein positives Ergebnis ergibt.

$(+8)+(-6)=+2$

$(-8)+(+6)=-2$

Addition einer positiven und einer negativen Zahl in der Weise vorgenommen wird, daß die kleinere Zahl von der größeren abgezogen wird und das Resultat das Vorzeichen der größeren Zahl erhält.

$(+5)-(-7)=+12$ Subtraktion einer negativen Zahl von einer positiven Zahl ein positives Ergebnis bildet.

$(+3)\times(+3)=+9$ Die Multiplikation einer positiven Zahl mit einer positiven Zahl ein positives Ergebnis gibt.

$(-3)\times(+5)=-15$ Die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl ein negatives Ergebnis ergibt.

$(-3)\times(-9)$

Nimm (-9) 3x weg. $=27$

Die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer negativen Zahl x ein positives Ergebnis ergibt.

$12:3=4$ Die Division einer positiven Zahl durch eine positive Zahl ein positives Ergebnis ergibt.

$-36:4=-9$

Aufeinanderfolgende Subtraktion.

$+36:-4=-9$

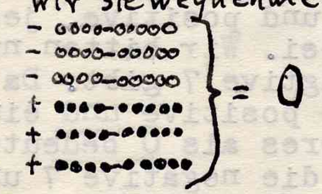
Die Division eines negativen Devisors durch einen positiven Dividenden + umgekehrt ein negatives Ergebnis ergibt.

$-36:-4=+9$ Die Division eines negativen Devisors durch einen negativen Dividenden ein positives Ergebnis ergibt.

$-\frac{5}{7}=\frac{-5}{7}=\frac{5}{-7}$ Das Vorzeichen vor einem Bruch sich immer auf alle Teile, Zähler wie Nenner bezieht, ganz gleich, wo es steht.

$-\frac{5}{7}-\frac{-5}{7}=0$

x Wir mussen -9 erst herstellen bevor wir sie wegnehmen können.



38. Vortrag am 27. 1. 58 gehalten von Mario Montessori

Über die Einführung eingekleideter Rechenaufgaben und über das Finden der algebraischen Formeln.

Zunächst ist das Kind an den einzelnen Rechenoperationen interessiert und das Rechenmaterial bietet vielseitige Gelegenheit die einzelnen Operationen zu üben.
Nach einiger Zeit jedoch, wenn das Kind die elementaren Kenntnisse erobert hat, können wir beginnen, ihm kleine Probleme zu stellen. Diese Probleme können mit Hilfe des Materials gelöst werden. Diese Probleme werden als kleine Spiele eingeführt. Das Kind wird angeregt, neue Probleme sich selber zu stellen. Das Kind übt sich dadurch in Fragestellung und deren Beantwortung. Durch das vorbereitete Material erhält das Kind die Möglichkeit, selber zu der algebraischen Formel zu gelangen. Ist das Kind bis zu diesem Punkt gelangt, ist es Zeit, die allgemeingültige Regel zu geben. Diese wird vom Kind ohne Schwierigkeit verstanden, da es bereits gesammelten Erfahrungen damit verbindet.

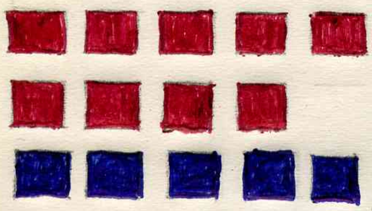
Wenn eine Formel gefunden worden ist, so kann sie immer angewandt werden. Sie behält in jedem Falle ihre Wirksamkeit. Wir können sie mit dem Gesetz des Lebens vergleichen. Alle Wesen durchlaufen die Stadien von Geburt - Wachsttum - und Tod. Keiner kann diesem Gesetz entfliehen. Wenn die äußeren Bedingungen sich auch oftmals verändern mögen, so wird die Wirksamkeit des höheren Gesetzes dadurch nicht verändert.

Beispiele der eingekleideten Aufgaben und die Hinführung zur algebraischen Formel siehe die folgenden Illustrationen.

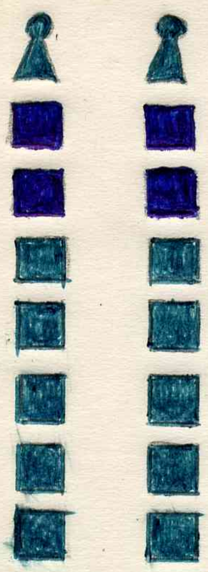
BEISPIELE

1. eingekleidete Aufgabe
Subtraktion + Division

Text: Ein Vater besitzt 500 Äpfel.
Er verkauft zuerst 100 Äpfel.
und später nocheinmal 350.
Die übrig gebliebenen Äpfel verteilt
er an seine Kinder.
Wieviel Äpfel erhält jedes Kind?



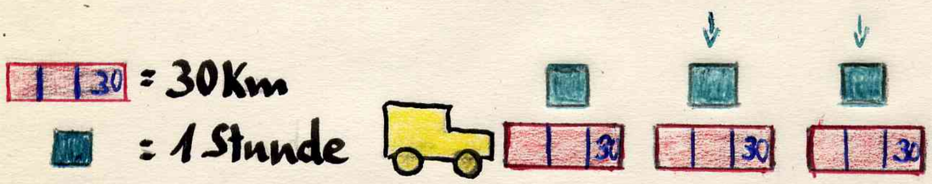
= 500 Äpfel
=- 100 Äpfel
=- 350 Äpfel



= 25 Äpfel erhält jedes Kind

2. eingekleidete Aufgabe
Verhältnis von:
Zeit - Entfernung - Geschwinigkeit

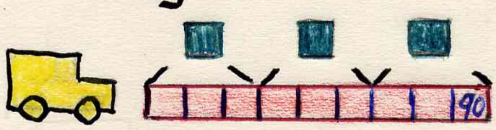
Text: Ein Auto fährt 30 Km in der Stunde
Die Entfernung, die das Auto zurück=
legt beträgt 90 Km.
Wielange ist das Auto unterwegs?



$$\frac{G}{E} = Z$$

Das Auto ist 3 Stunden unterwegs.

Text: Das Auto ist 3 Stunden unterwegs
und es legt in dieser Zeit 90 km
zurück. Wie groß ist seine Ge=
schwindigkeit?



$$\frac{Z}{E} = G$$

Text: Das Auto ist 3 Stunden unterwegs.
Seine Geschwindigkeit beträgt in der
Stunde 30 km. Wie groß ist die Entfer=
nung, die das Auto zurücklegt?

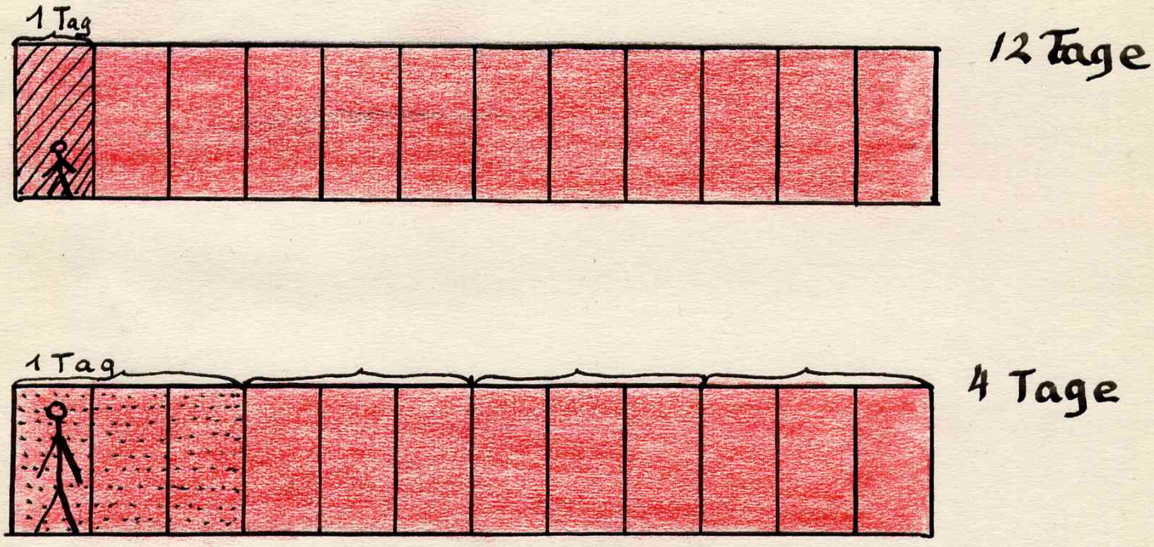
$$Z \times G = E$$

3. eingekleidete Aufgabe

Verhältnis von:

Arbeitskraft + Zeit

3A Text: Ein abgestecktes Stück Land soll umgegraben werden.
Ein Junge braucht dafür 12 Tage
Ein Mann arbeitet 3mal so schell.
Wieviel Tage braucht der Mann, um das Stück Land umzugraben?



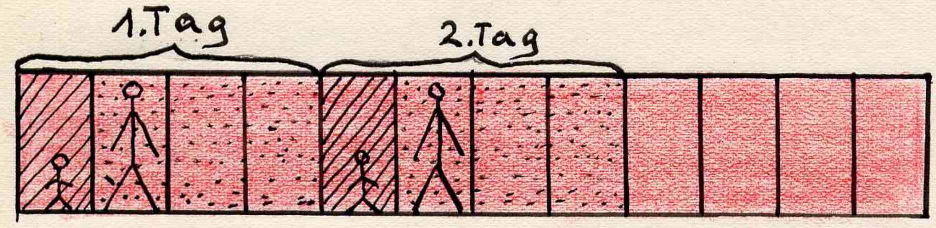
Er braucht 4 Tage.

$12 : 3 = 4$

3. eingekleidete Aufgabe
Verhältnis von:
Arbeitskraft + Zeit

3B

Text: Der Junge und der Mann arbeiten 2 Tage lang zusammen. Dann geht der Mann weg. Wielange muß der Junge arbeiten, um das restliche Stück Land umzugraben?



In den 2 Tagen haben der Junge und der Mann 8 Teile des Landes umgegraben. So bleiben für den Jungen noch 4 Teile übrig. Für jeden Teil braucht er 1 Tag.

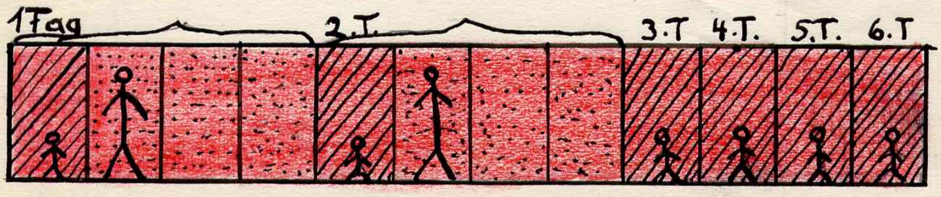
<u>4 Tage braucht der Junge, um das restliche Stück Land umzugraben.</u>

3. eingekleidete Aufgabe

Verhältnis von:

3C **Arbeitskraft + Zeit**

Text: Für die geleistete Arbeit werden 36 DM bezahlt.
Wieviel Geld erhält der Junge?
Wieviel Geld erhält der Mann?



Da jeder den gleichen Anteil an Arbeit geleistet hat, erhält auch jeder den gleichen Anteil Geld.

36 DM : 2 = 18 DM

Der Junge arbeitete 6 Tage.
Der Mann arbeitete nur 2 Tage.

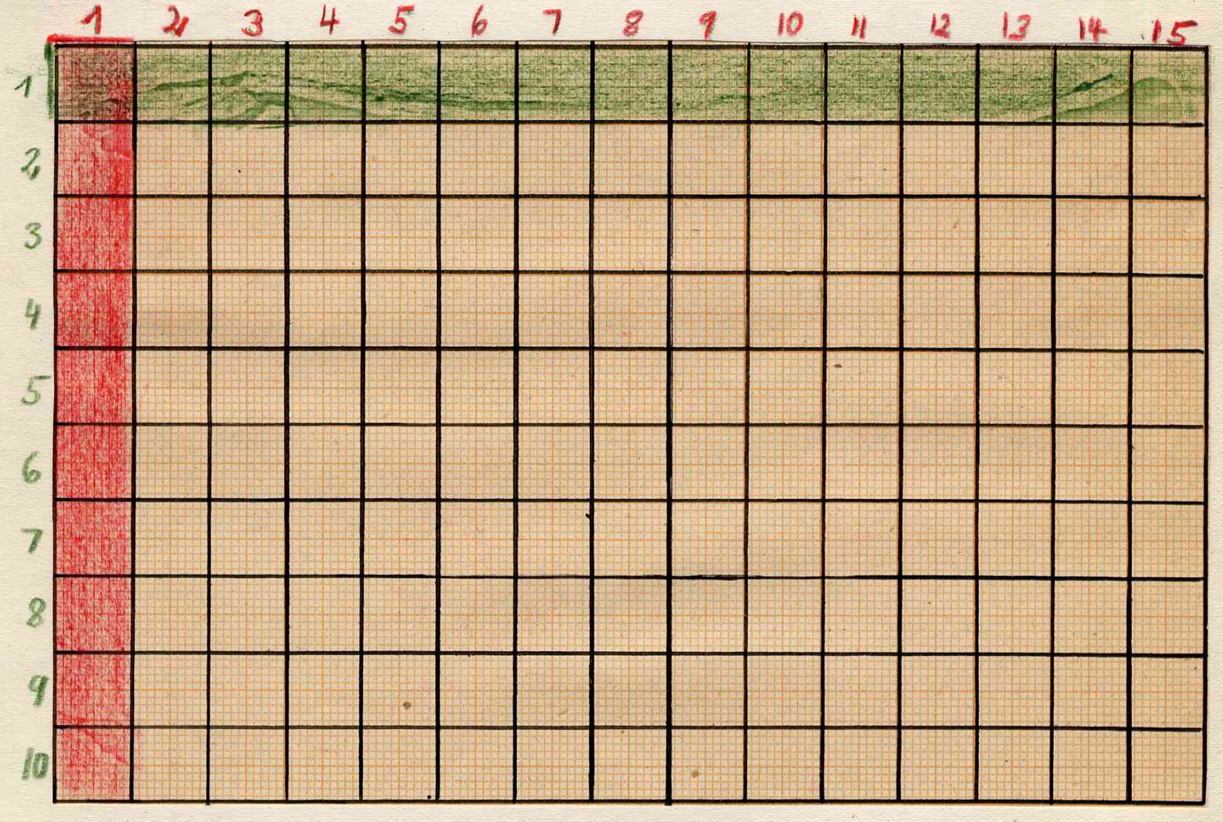
4. eingekleidete Aufgabe

Verhältnis von:

Arbeitskraft + Zeit

Text: Philipp braucht 15 Tage, um ein Stück Land umzugraben.

Fritz braucht zu der selben Arbeit nur 10 Tage.



Wenn beide zusammen arbeiten, wie lange müssen sie dann graben?

Das Stück Land beträgt 150 Felder.

A 1. Schritt: Wieviel schafft jeder an einem Tag?

= F = 15 Felder

= Ph = 10 Felder

2. Schritt: Zusammen schaffen sie an einem Tag

$15 + 10 = 25$ Felder

3. Schritt: 150 Felder : 25 = 6

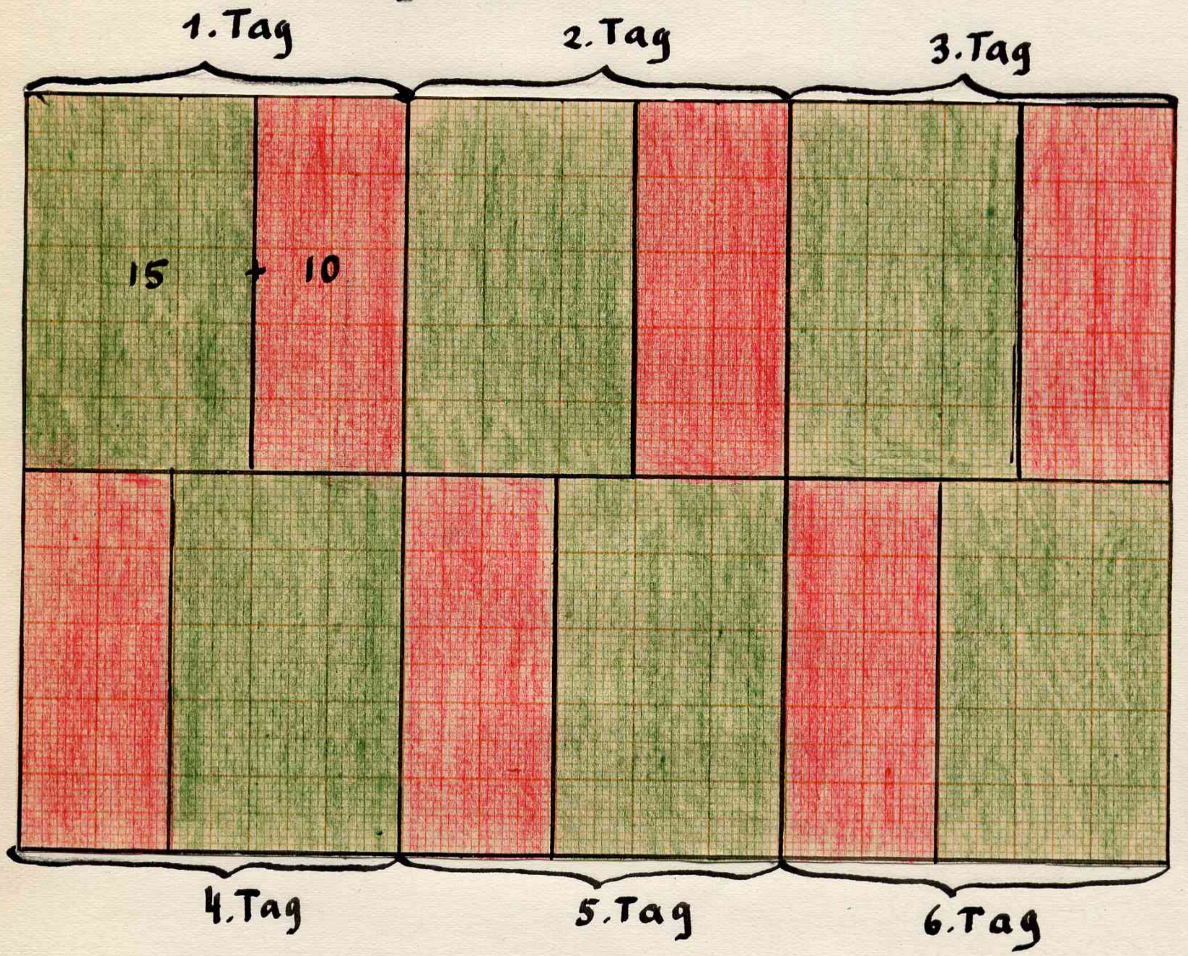
6 Tage müssen beide zusammen arbeiten.

B 1. Schritt: = F = $\frac{1}{15}$ = F = $\frac{1}{10}$

2. Schritt: $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

3. Schritt: $\frac{1}{6}$ schaffen sie an einem Tag

Sie brauchen 6 Tage, um das ganze Stück umzugraben $\frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$



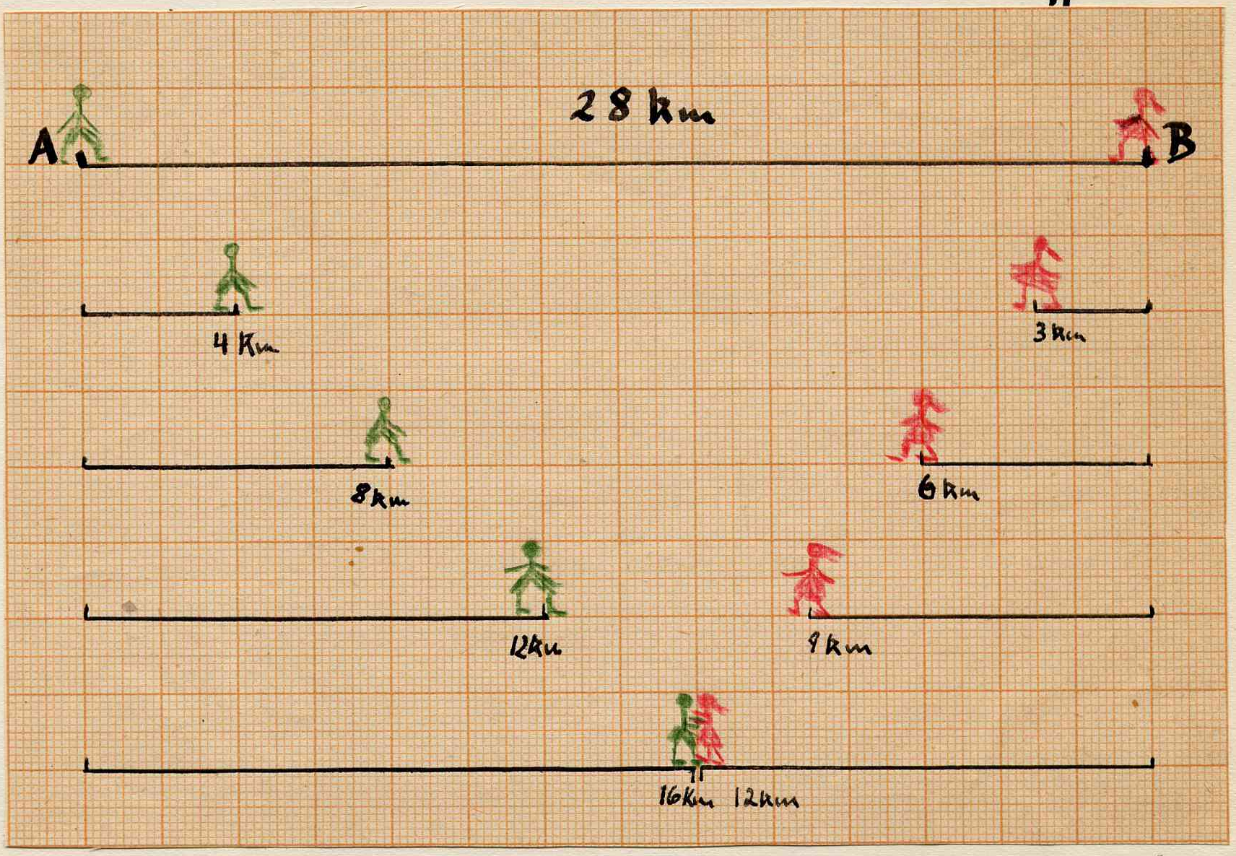
5. eingekleidete Aufgabe

Verhältnis von:

Zeit - Geschwindigkeit - Entfernung
im Vergleich
zu einer 2. Zeit - Geschw. - Entfernung
→ ←

Text: Hans und Grete gehen aufeinander zu.
Hans startet von Punkt A
Grete " " " B
Punkt A + B sind 28 km voneinander entfernt.
Hans läuft 4 km in der Stunde.
Grete " 3 " " " " .
Wo und wann werden sie sich treffen?

$4 \times 4 = 16$
$3 \times 4 = 12$
28



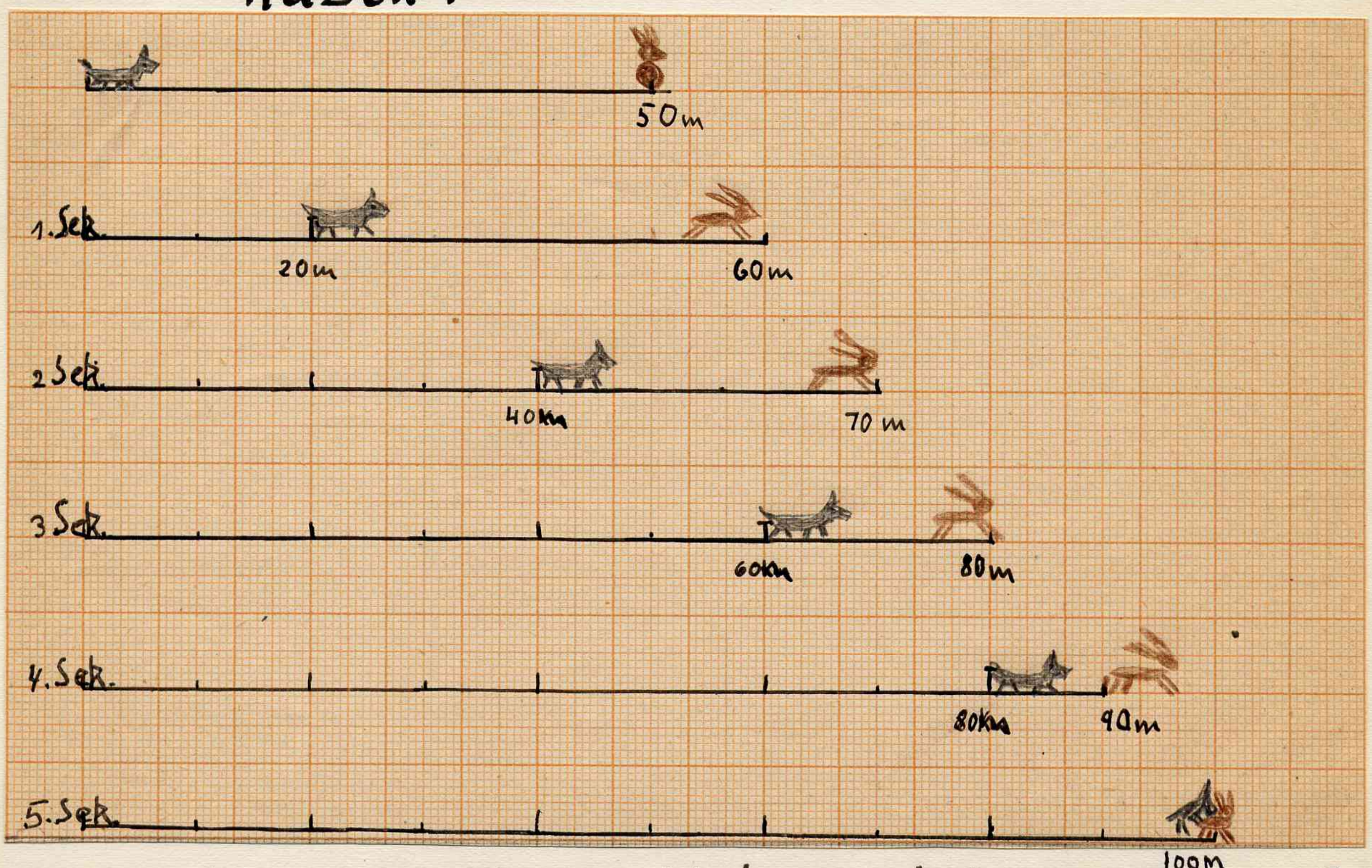
Grete kommt Hans 12 km entgegen. Sie treffen sich nach 4 Std

6. eingekleidete Aufgabe

Verhältnis von:

Zeit - Geschwindigkeit - Entfernung
im Vergleich
zu einer 2. Zeit - Geschw. - Entfernung

Text: Ein Hund verfolgt einen Hasen.
Der Hund läuft 20m in der Sekunde
Der Hase läuft 10m in der Sekunde.
Der Hase hat zu Beginn der Verfolgung 50m Vorsprung.
Wo und nach wie langer Zeit wird der Hund den Hasen eingeholt haben?

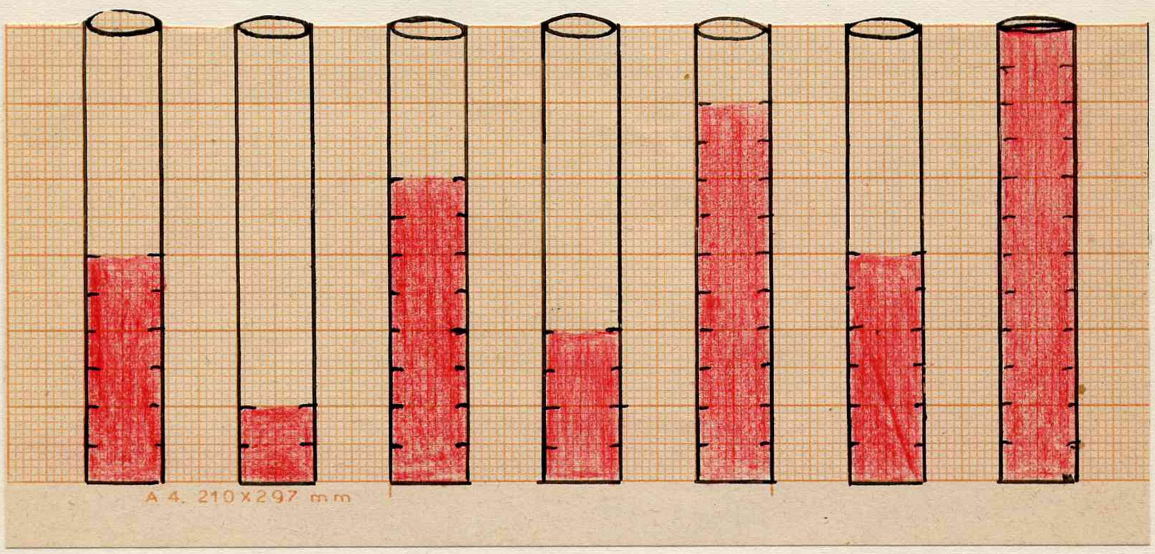


Nach 5 Sekunden holt der Hund den Hasen auf 100m ein. Der Hund läuft doppelt so schnell

7. eingekleidete Aufgabe
Verhältnis von:
2 gegensätzlichen Bewegungen
Subtraktion + Addition.

Text: Ein Affe klettert an einer ein=
gefetteten Stange hoch.
Er schafft 6 m.[x] Jedoch jede 2. Min.
rutscht er wieder 4 m zurück.
Wielange klettert der Affe, um
die Spitze des 12 m hohen Stange
zu erreichen?

x in der Minute



6 − 4 + 6 − 4 + 6 − 4 + 6

24 − 12 = 12

<u>Nach 7 Minuten hat er die Spitze erreicht.</u>

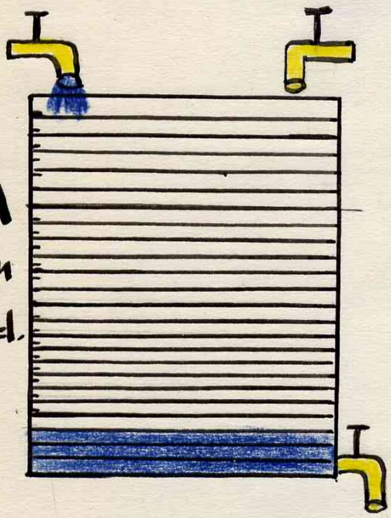
8. eingekleidete Aufgabe
Verhältnis von 3 verschiedenen Größen zueinander.

Text: Ein Wasserbecken wird mit Wasser gefüllt. 3 Hähne sind im Gebrauch.
Wasserhahn A
Wasserhahn B
Abflußhahn C

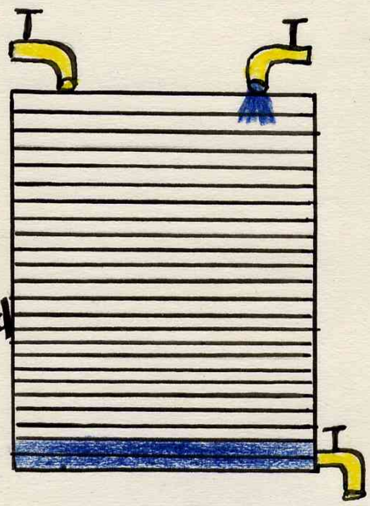
Hahn A würde das Becken in 8 Stund. füllen
" B " " " " 12 " "
" C " " " " 6 " Leeren

Wenn alle Hähne geöffnet wären wie lange würde es dauern, bis das Becken gefüllt ist?

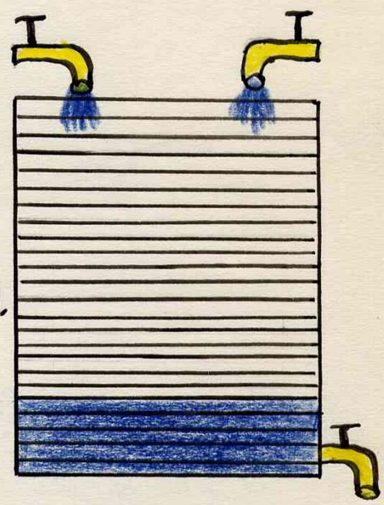
A in 1 Std.



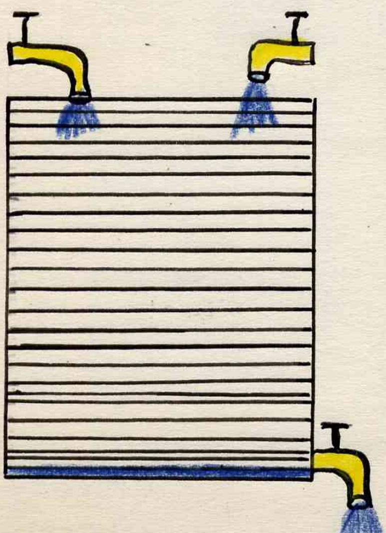
B in 1 Std.



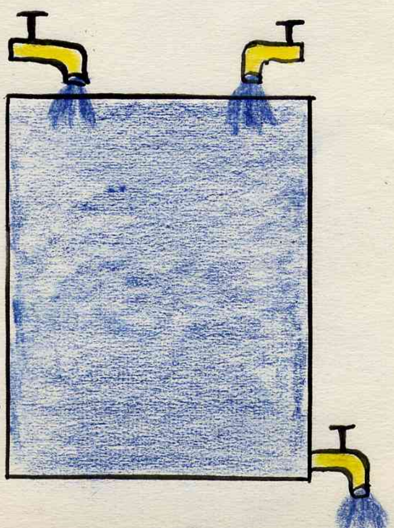
A + B in 1 Std.



(A+B)-C in 1 Std.



RESULTAT 24 Std.



$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} - \frac{4}{24} = \frac{1}{24}$$

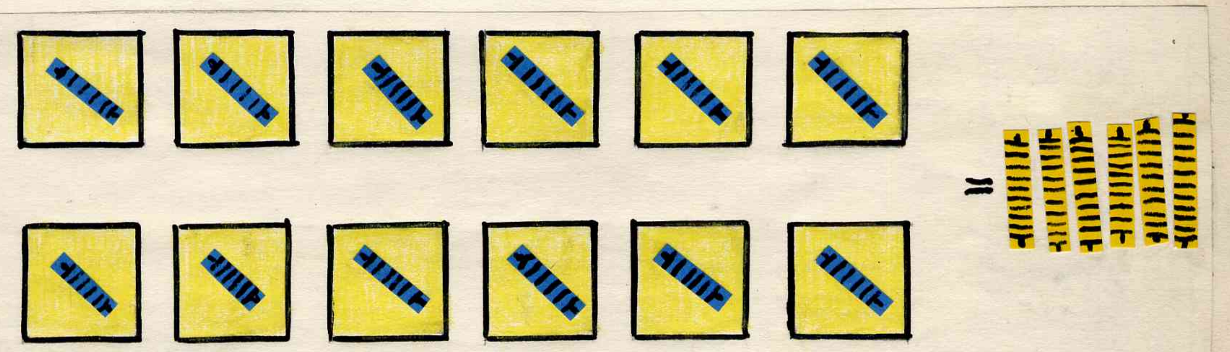
In jeder Stunde bleibt $\frac{1}{24}$ im Becken. Deshalb ist das Becken nach 24 Stunden gefüllt.

Kapital + Zinsen

Wir führen dieses Thema mit einer interessanten Ge=
schichte ein,z.B.:
Ein Unternehmer will sich Geld borgen, um eine In=
dustrie zur Herstellung von Mixbechern aufbauen zu
können. Er verspricht dem Verleiher, ihm für jede
100 DM, die er verdient 5 % abzugeben außer dem Kapital,
das er ihm zu Beginn geborgt hat. Der Verleiher rech=
net sich aus, wieviel er erhält, wenn der Borger für
1200 DM Mixbecher verkauft hat.

Wir legen die 1200 DM in Form der Hunderterquadrate aus.
In unserm Falle sind es 12.
Aus jedem Hundert bekommen wir 5DM. Diese legen wir
in Form der Fünferperlstäbchen auf die Hundertquadrate.

Um den Gesamtgewinn zu errechnen zählen wir die Gewinn=
anteile aus jedem Hundert zusammen.
Wir erhalten die Zahl 60 und wir tauschen die Fünfer=
stäbchen in 6 Zehnerstäbchen um.



Anschließend können wir den Rechenvorgang mit Zahlen
und Buchstaben ausdrücken:

$$\frac{K}{100} \times Z = \frac{K \times Z}{100}$$

Die Kinder können dann zunächst eine Reihe solcher
ganz einfachen Probleme lösen bevor wir neue kleine
Schwierigkeiten hinzufügen.

$$\frac{1200 \times 5}{100} = 60$$

Die zweite Geschichte illustriert den Vorgang, der sich
vollzieht, wenn wir Geld auf die Bank bringen. Dafür,
daß die Bank unser Geld wieder mit Gewinn verleihen kann,
gibt sie uns für jede 100 DM im Jahr einen Zinssatz.

Hier folgt ein Beispiel:

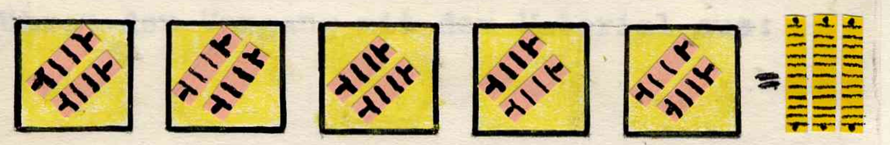
Wir bringen 500 DM für 2 Jahre auf die Bank und der
Zinssatz beträgt 3%.
Wie groß ist unser Gewinn?

Wir kürzen die Begriffe ab:

500 DM heißt unser Kapital = K
3% beträgt unser Zinssatz = Z
2 Jahre ist die Dauer der Zeit = D
Den Gewinn wollen wir errechnen.= G

K	Z	D	G
500	3%	2	?

Wir legen das Problem in Buchstaben und Zahlen aus:



und
führen den Vorgang mit dem Material aus.

Der Gewinn wird zusammen=
gezählt und in Zehnerstäb=
chen umgetauscht

Nachdem wir das Resultat errechnet haben, machen wir uns be=
wußt, welche Schritte wir unternehmen mußten, um zum Ziel zu
gelangen.

1. Das Kapital wurde durch 100 geteilt $\frac{500}{100}$
2. Das Resultat wurde mit dem Zinssatz malgenommen. $5 \times 3 = 15$
3. Der errechnete Zinssatz eines Jahres wurde mit der Dauer multipliziert. $15 \times 2 = 30$

Der Vorgang kann als Formel ausgedrückt werden:

1. ausführlich

$$\left(\frac{K}{100} \times Z\right) \times D$$

2. vereinfacht

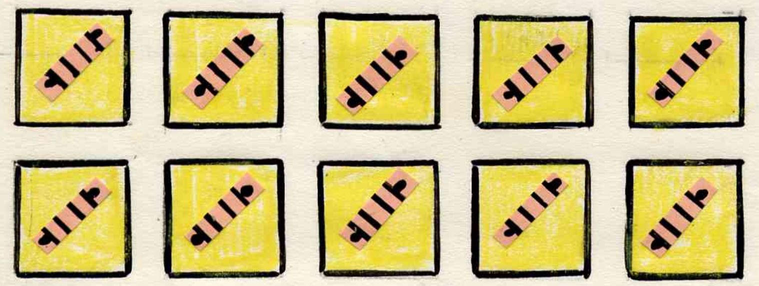
$$\frac{K \times Z \times D}{100}$$

Nachdem wir gezeigt haben, wie man den Gewinn errechnet, füh=
ren wir die drei andern Arten der Errechnung ein nämlich:

K	Z	D	G	
500	?	2	30 DM	Zinssatz unbekannt
?	3%	2	30 DM	Kapital unbekannt
500	3%	?	30 DM	Zeit unbekannt

Zinssatz unbekannt

K	Z	D	G
500	?	2	30



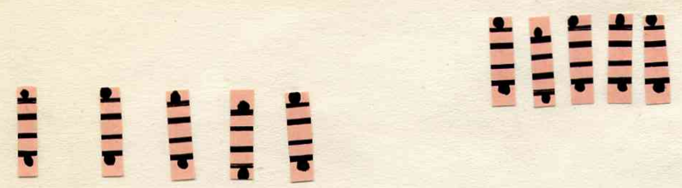
Der Gewinn wird auf
das Kapital von 2
Jahren verteilt.
Das Resultat ist ein
Zinssatz von 3%.

$$\frac{\frac{G}{D}}{\frac{K}{100}} \qquad \frac{\frac{30}{2}}{\frac{500}{100}}$$

$$\frac{G \times 100}{D \times K} \qquad \frac{30 \times 100}{2 \times 500} = \frac{30\,000}{1\,000} = 3$$

Kapital unbekannt

K	Z	D	G
?	3%	2	30

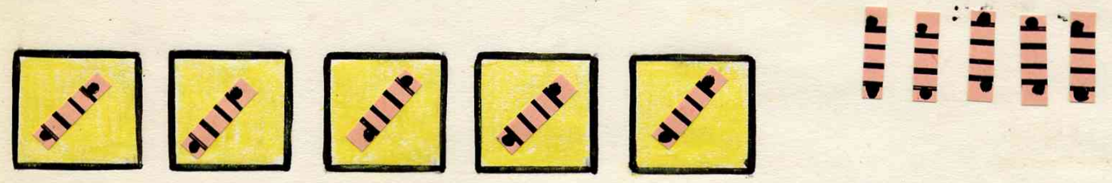


$$\frac{G}{D} : Z \times 100 \quad = \frac{30}{2} = 15 : 3 = 5 \times 100$$

$$\frac{G \times 100}{D \times Z} = \frac{30 \times 100}{2 \times 3} \quad \frac{3000}{6} = 500$$

Zeitdauer unbekannt

K	Z	D	G
500	3%	?	30



$$\frac{G}{Z} : \frac{K}{100} = \frac{G \times 100}{Z \times K}$$

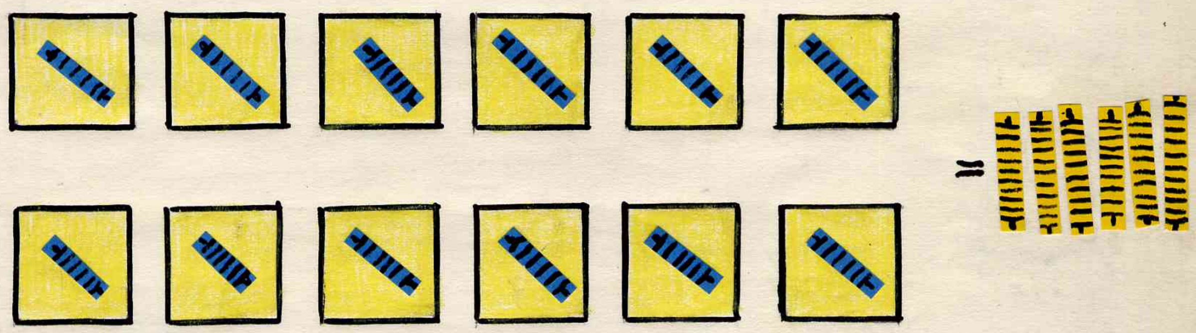
$$\frac{30}{3} : \frac{500}{100} = \frac{30 \times 100}{3 \times 500} = \frac{30\,000}{15\,000} = 2$$

Kapital + Zinsen

Wir führen dieses Thema mit einer interessanten Geschichte ein, z.B.:
Ein Unternehmer will sich Geld borgen, um eine Industrie zur Herstellung von Mixbechern aufbauen zu können. Er verspricht dem Verleiher, ihm für jede 100 DM, die er verdient 5 % abzugeben außer dem Kapital, das er ihm zu Beginn geborgt hat. Der Verleiher rechnet sich aus, wieviel er erhält, wenn der Borger für 1200 DM Mixbecher verkauft hat.

Wir legen die 1200 DM in Form der Hunderterquadrate aus. In unserm Falle sind es 12.
Aus jedem Hundert bekommen wir 5DM. Diese legen wir in Form der Fünferperlstäbchen auf die Hundertquadrate.

Um den Gesamtgewinn zu errechnen zählen wir die Gewinnanteile aus jedem Hundert zusammen.
Wir erhalten die Zahl 60 und wir tauschen die Fünferstäbchen in 6 Zehnerstäbchen um.



Anschließend können wir den Rechenvorgang mit Zahlen und Buchstaben ausdrücken:

$$\frac{K}{100} \times Z = \frac{K \times Z}{100}$$

Die Kinder können dann zunächst eine Reihe solcher ganz einfachen Probleme lösen bevor wir neue kleine Schwierigkeiten hinzufügen.

$$\frac{1200 \times 5}{100} = 60$$

Die zweite Geschichte illustriert den Vorgang, der sich vollzieht, wenn wir Geld auf die Bank bringen. Dafür, daß die Bank unser Geld wieder mit Gewinn verleihen kann, gibt sie uns für jede 100 DM im Jahr einen Zinssatz.

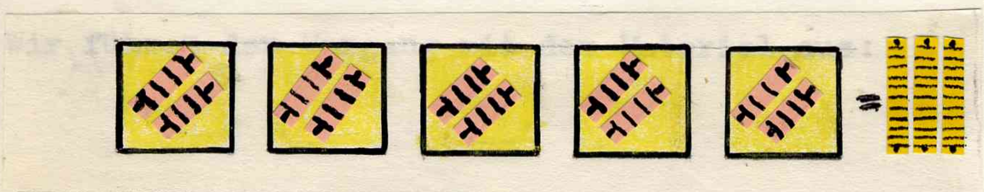
Hier folgt ein Beispiel:

> Wir bringen 500 DM für 2 Jahre auf die Bank und der Zinssatz beträgt 3%.
> Wie groß ist unser Gewinn?

		Wir kürzen die Begriffe ab:
500 DM heißt unser Kapital	=	K
3% beträgt unser Zinssatz	=	Z
2 Jahre ist die Dauer der Zeit	=	D
Den Gewinn wollen wir errechnen.	=	G

K	Z	D	G
500	3%	2	?

Wir legen das Problem in Buchstaben und Zahlen aus:



und

führen den Vorgang mit dem Material aus.

Der Gewinn wird zusammengezählt und in Zehnerstäbchen umgetauscht

Nachdem wir das Resultat errechnet haben, machen wir uns bewußt, welche Schritte wir unternehmen mußten, um zum Ziel zu gelangen.

1. Das Kapital wurde durch 100 geteilt $\frac{500}{100}$
2. Das Resultat wurde mit dem Zinssatz malgenommen. $5 \times 3 = 15$
3. Der errechnete Zinssatz eines Jahres wurde mit der Dauer multipliziert. $15 \times 2 = 30$

Der Vorgang kann als Formel ausgedrückt werden:

1. ausführlich

$$\left(\frac{K}{100} \times Z\right) \times D$$

2. vereinfacht

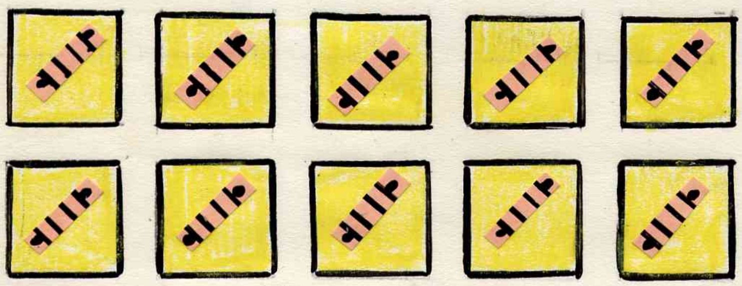
$$\frac{K \times Z \times D}{100}$$

Nachdem wir gezeigt haben, wie man den Gewinn errechnet, führen wir die drei andern Arten der Errechnung ein nämlich:

K	Z	D	G	
500	?	2	30 DM	Zinssatz unbekannt
?	3%	2	30 DM	Kapital unbekannt
500	3%	?	30 DM	Zeit unbekannt

Zinssatz unbekannt

K	Z	D	G
500	?	2	30



Der Gewinn wird auf das Kapital von 2 Jahren verteilt.
Das Resultat ist ein Zinssatz von 3%

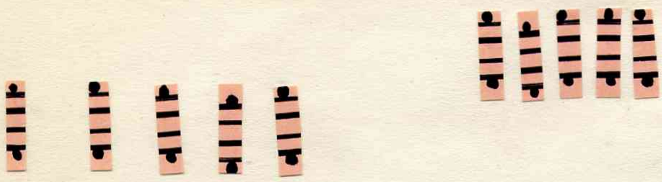
$$\frac{G}{D} \qquad \frac{30}{2}$$

$$\frac{K}{100} \qquad \frac{500}{100}$$

$$\frac{G \times 100}{D \times K} \qquad \frac{30 \times 100}{2 \times 500} = \frac{30\,000}{1\,000} = 3$$

Kapital unbekannt

K	Z	D	G
?	3%	2	30

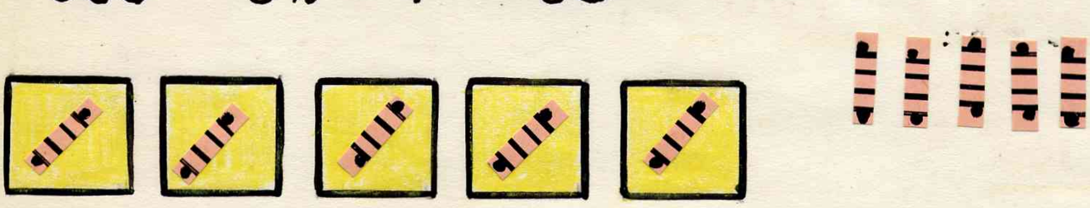


$$\frac{G}{D} : Z \times 100 \quad = \frac{30}{2} = 15 : 3 = 5 \times 100$$

$$\frac{G \times 100}{D \times Z} = \frac{30 \times 100}{2 \times 3} \quad \frac{3000}{6} = 500$$

Zeit dauer unbekannt

K	Z	D	G
500	3%	?	30

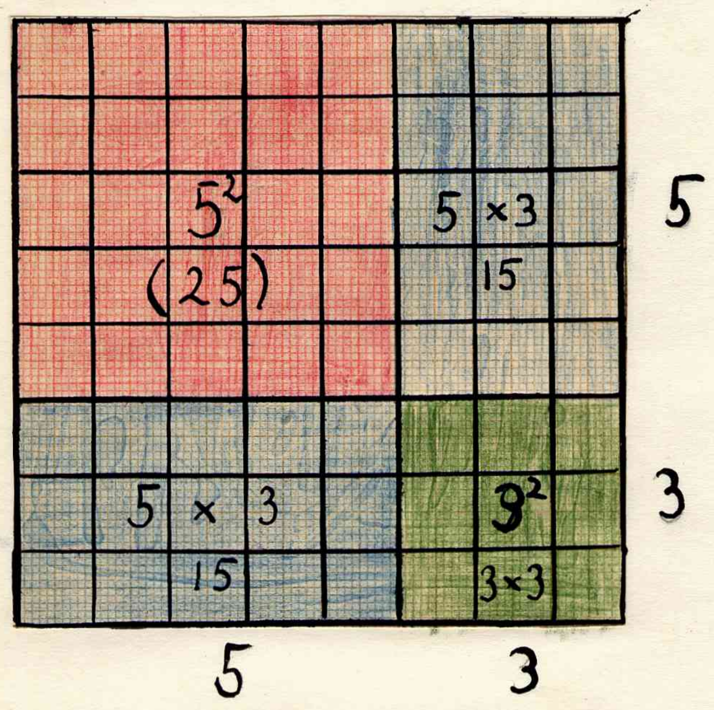


$$\frac{G}{Z} : \frac{K}{100} = \frac{G \times 100}{Z \times K}$$

$$\frac{30}{3} : \frac{500}{100} = \frac{30 \times 100}{3 \times 500} = \frac{30\,000}{15\,000} = 2$$

Quadratische Gleichungen können gebildet werden

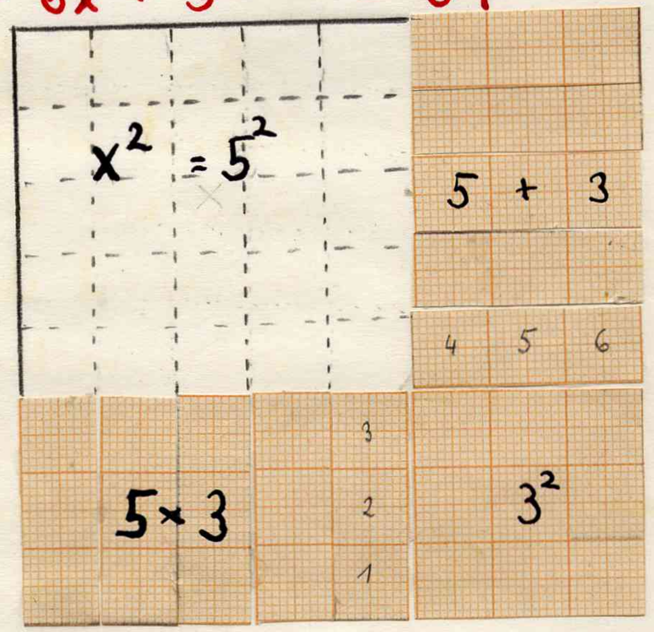
Jede Multiplikationsaufgabe in der Quadratzahlen entstehen, das Heißt, wenn eine Zahl mit sich selber malgenommen vor=kommt, können wir die Aufgabe in einer"Quadratischen Glei=chung" ausdrücken.
Ist eine ganze Zahl mit sich selber malgenommen dann entsteht ein Quadrat zum Schluß. (53 x 53) oder $(5+3)\times(5+3)$
Werden zwei verschiedene Zahlen miteinander malgenommen, dann entsteht ein Rechteck. (53 x 54) oder $(5\times 3)\times(5+4)$

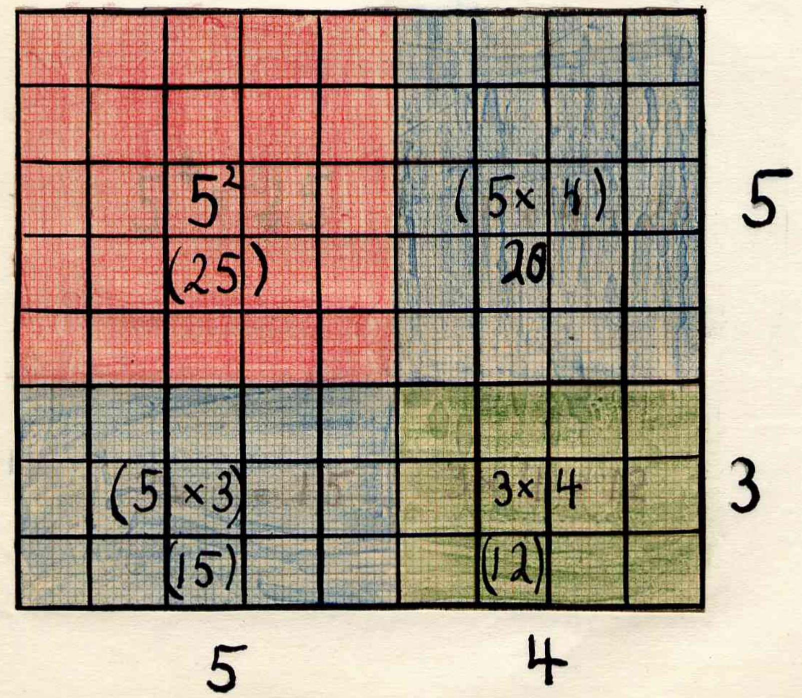


$$(5+3)^2 = (5+3)\times(5+3)$$
$$25+15+15+9$$
$$5^2+2\times(3\times 5)+9^2$$

Wenn wir statt der Zahl 5 ein x schreiben, würde die Aufgabe folgen=dermaßen heißen:

$$(x+3)^2 = (x+3)\times(x+3)$$
$$x^2+2\times(3x)+9 = 64$$
$$x^2+6x+3^2 = 64$$

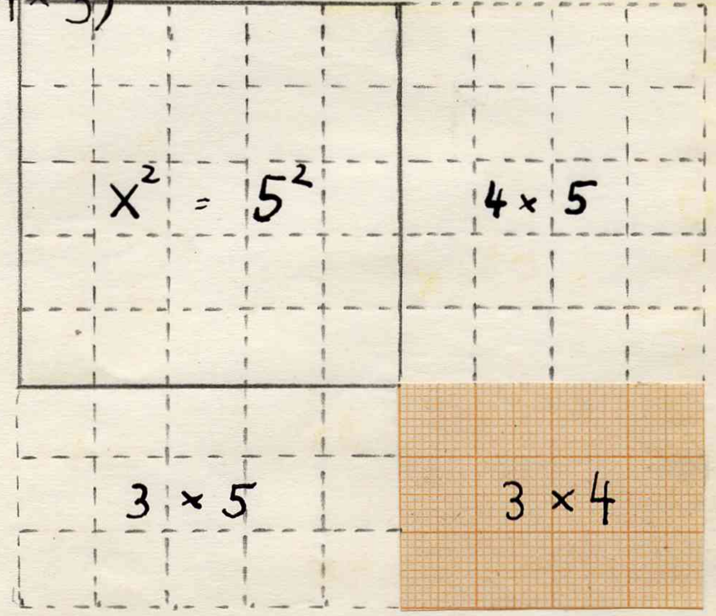




$$(5+4)\times(5+3) = 25+15+20+12$$
$$5^2+(3\times 5)+(4\times 5)+(4\times 3)$$

Wir setzen X für die Zahl 5 ein:

$$(x+4)\times(x+3) = 72$$
$$x^2+4x+3x+12 = 72$$
$$x^2+7x+12 = 72$$



ausführlich	einfach	errechnet:
64	64	
− 9	− 9	$= 3^2$
55	55	
− 7	− 30	$= 6X$ d.h. 6×5
48	− 25	$= x^2$
9	00	
39		
− 11		
28		
− 13		
15		
15		
00		

Der Rechenvorgang:
Zuerst wird mit der bekannten Zahl ein Quadrat gebildet. 6x wird dann auf die beiden Seiten verteilt. Die verbrauchte Quantität wird von 64 abgezogen. Mit dem Rest muß nun x^2 und und die nicht ausgefüllten 6x gebildet werden.

einfach errechnet:

72	
− 12	
60	
− 25	$= 5^2 = x^2$
35	
− 15	$= 3\times 5 = 3x$
20	
− 20	$= 4\times 5 = 4x$

Die bekannte Zahl wird so geformt, daß die mit x kombinierte Zahl auf die beiden Seiten verteilt werden kann. Mit dem Rest wird dann x^2 errechnet.

Die Bedeutung der Klammer wird deutlich.

$9 \times 2r + 3 \times 25 : 5 =$

$9 \times 2r + 3 \times (25 : 5) =$

$9 \times (2r + 3) \times 25 : 5 =$

$(9 \times 2r + 3) \times (25 : 5) =$

$$\begin{aligned} 9 \times 2r + 3 \times 25 : 5 &= \\ 18r + 3 \times 25 : 5 &= \\ 21 \times 25 : 5 &= \\ 525 : 5 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times 2r + 3 \times (25 : 5) &= \\ 18 + 3 \times (\ 5\ ) &= \\ 18 + 15 &= 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \times (2r + 3) \times 25 : 5 &= \\ 9 \times (\ 5r) \times 25 : 5 &= \\ 45r \times 25 : 5 &= \\ 45r \times 5 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9 \times 2r + 3) \times (25 : 5) &= \\ 21r \times 5 &= 105 \end{aligned}$$

Vorlesung gehalten am 16. 6. 58 von Mario Montessori

Zusammenfassung über das Lehren der Mathematik

Unser wichtigstes Anliegen muß es sein, dem Kinde klare Vorstellungen zu vermitteln.
Um die Aufmerksamkeit auf einen bestimmten Vorgang oder einen bestimmten Aspekt in der Mathematik zu lenken, sind sie im Material isoliert voneinander dargestellt, das heißt jedoch nicht, daß sie ohne Zusammenhang miteinander an das Kind herangebracht werden. Die Ganzheit wird trotz der Isolierung bewahrt oder besser gesagt in vollkommenster Weise angestrebt. Die Vorstellung von der Ganzheit geht der Konzentration auf die Einzelheiten voraus.
Die Selbsttätigkeit des Kindes ist der Schlüssel, der das Tor zu wirklichem Wissen und zu wahrer Bildung öffnet.

So beachten wir folgende Punkte dargestellt an der Addition:

1. Isolierung der Addition von andern Operationsarten, um die Verschiedenheit herauszustellen. Durch die verschiedenen Tätigkeiten, die das Kind ausführt, wird ihm der Unterschied der einzelnen Operationen zum Bewußtsein gebracht.
2. Die einzelnen Kombinationen, die bei der Addition möglich sind, werden durch besonderes Material herausgestellt und damit wird dem Kind die Möglichkeit des Auswendiglernens gegeben. Dies Auswendiglernen geschieht jedoch nicht mechanisch, sondern wird durch das ständige Wiederholen hervorgerufen, das ~~vom Kind~~ aus einem bestimmten Interesse heraus vom Kind unternommen wird. Etwas, das die Aufmerksamkeit des Kindes hervorgerufen hat, führt es zu weiterer Beschäftigung mit ähnlichen Materialien. Auf diese Weise findet allmählich eine regelrechte Inkarnation der einzelnen Dinge im Kinde statt.

Alle rechnerischen Operationen sind auf den Zahlen von 1 - 9 aufgebaut und deshalb ist es unser erstes Anliegen, diese Zahlen mit all ihren Kombinationsmöglichkeiten darzustellen. Ist diese Grundlage erst einmal geschaffen, wird das Kind immer wieder erfahren, daß die neuen Dinge in Wirklichkeit nicht vollkommen neu sind, sondern nur eine Erweiterung des Horizontes bedeuten. Wir entdecken Dinge, die wir schon längst unbewußt in unserm Innern mit uns trugen. Es ist wichtig, dem Kind seine eigenen, schöpferischen Kräfte bewußt zu machen.

Das, was der Staat von den Kindern verlangt, muß mit in Betracht gezogen werden. Ältere Kinder können mit diesem Programm bekannt gemacht werden und die Kinder werden leicht in der Lage sein, die gestellten Schwierigkeiten und Tricks zu überwinden auf Grund ihrer soliden Basis und ihrer klaren Vorstellungen.

So ist zum Beispiel die Division die Umkehrung der Multiplikation. Dies ist ein Punkt, der den Kindern ins Bewußtsein gehoben werden muß.
Die Kinder, die mit den 4 grundlegenden Operationen im Prinzip bekannt geworden sind, brauchen für die weiteren Materialien lediglich eine Einführung in eine neue Technik. Wenn die lange Division auf dem Rechenrahmen gelernt worden ist, so ist der flache R-echenrahmen lediglich eine Erweiterung. Diese Erweiterungen sind eigentlich ein Luxus und können deshalb als parallele Übungen bezeichnet werden. Sie tragen jedoch

wiederum einen Inhalt in sich, der für spätere Operationen bereits vorbereitet.

Wir lenken die Aufmerksamkeit auf das Wort "Multiple" und wir erklären die besondere Bedeutsamkeit dieses Begriffes.

In den Faktoren auf der andern Seite finden wir den Aspekt der Teilbarkeit eingeschlossen.

Besondere Übungen bestehen für das Finden von Primfaktoren und das Erkennen der Teilbarkeit der einzelnen Zahlen.

Die Kinder werden bekannt gemacht mit den geometrischen Formen der Multiplikation. Jede Multiplikation kann geometrisch dargestellt werden und jede geometrische Form kann in Zahlen ausgedrückt werden. - Daran anschließend können wir die algebraische Ausdrucksweise einführen. Diese ist eine Vereinfachung der arithmetischen Form. allgemeiner

Die Erkenntnis, daß man eigentlich schon wußte, was man annahm noch nicht zu wissen, ist äußerst belebend und die Beherrschung der neuen Technik wird mit Freude geübt.

Eine logische Folge der Operationen muß beachtet werden. So kommt die Erkenntnis der Multiplikation vor der Einführung der Division, und die Multiplikationszahlen vor den einzelnen Faktoren.

Die Handhabung negativer Zahlen schließt eine Subtraktion in sich ein. Das Gesetz der Zeichen, veranschaulicht das, was in Wirklichkeit vorgeht. Es ist dehalb wichtig, den Vorgang der einzelnen Übungen genau auszuführen.

Die Einführung der Brüche führt zum finden der "Gemeinsamen Multiplikationszahlen". Diese sind jedoch durch vorherige Übungen schon bekannt geworden, sodaß bei Einführung der Brüche, die Aufmerksamkeit auf der Besonderheit der Brüche an sich ruhen kann. Wenn wir später die Dezimalbrüche einführen, so sollten diese keinerlei Schwierigkeiten mehr bieten. Sie sollten vielmehr einem Spaß gleichen.

In den Problemaufgaben befindet sich immer ein Trick. Allgemein wird gesagt, daß Kinder nicht in der Lage sind, Schlüsse zu ziehen. Es ist jedoch nur notwendig, daß wir den Kindern die Möglichkeit des Verständnisses für die einzelnen Vorgänge geben. Konkrete Objekte und Illustrationen helfen den Kindern, sich klare Vorstellungen zu bilden. Diese Illustrationen sollten jedoch auf die Schlüsselprobleme beschränkt bleiben. Mit diesen Schlüsseln können die Kinder die notwendigen Folgerungen ziehen. Diese Aufgaben sollten in Form eines amüsanten Spiels gestellt werden. Die Einstellung des Lehrers zu den einzelnen Aufgaben und Problemen ist von größtem Einfluß auf die Einstellung der Kinder.

Symbolische Erklärung der negativen Zahlen

angewandt auf die Lehrer-Kindbeziehung.

Das schöpferischetätige Kind : +
Der hilfreiche Lehrer : +
Das untätige Kind : −
Der hindernde Lehrer : −

schöpferisch tätig oder hilfreich = +
untätig oder hindernd = −

Der Lehrer $\overset{+}{\text{hilft}}$ dem $\overset{+}{\text{schöpferischem}}$ Kind = +

Der Lehrer $\overset{+}{\text{hilft}}$ dem $\overset{-}{\text{untätigen}}$ Kind = −

Der Lehrer $\overset{-}{\text{hindert}}$ die $\overset{+}{\text{schöpferische}}$ Arbeit = −

Der Lehrer $\overset{-}{\text{hindert}}$ die $\overset{-}{\text{Untätigkeit}}$ = +